SCIENCES SUP

Aide-mémoire

IUT • Licence • Master

MÉCANIQUE DES STRUCTURES

Résistance des matériaux

Arnaud Delaplace
Fabrice Gatuingt
Frédéric Ragueneau

DUNOD

AIDE-MÉMOIRE
MÉCANIQUE DES STRUCTURES
Résistance des matériaux

Arnaud Delaplace
Chargé de recherche au CNRS, agrégé de Génie civil

Fabrice Gatuingt
Maître de conférences à l'ENS Cachan, agrégé de Génie Civil

Frédéric Ragueneau
Maître de conférences à l'ENS Cachan

DUNOD

Illustration de couverture : *INMAGINE*

ISBN 978-2-10-053958-1

Table des matières

Chapitre 1

Théorie des poutres

L'objectif de ce premier chapitre est de mettre en place et définir toutes les notions de base en mécanique des milieux continus permettant d'aborder les chapitres suivants traitant de la mécanique des structures, plus communément appelée Résistance des Matériaux.

1.1 PRINCIPES DE BASE EN RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

1.1.1 La notion de contrainte

Si un solide est en équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, de couples et de liaisons, ce dernier se déformera. La contrainte est l'objet mathématique permettant de quantifier les tensions internes à la matière. Pour définir la notion de contrainte, il suffit de procéder par la méthode des coupures virtuelles du solide étudié. En un point M, isolons une partie du

solide, défini par un plan de coupure orienté par le vecteur normal sortant au solide $\overrightarrow{n}$.

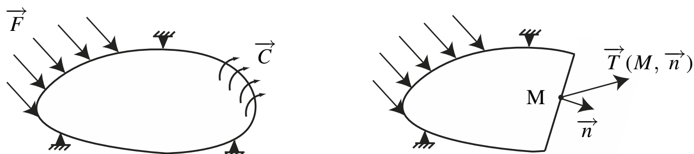


Figure 1.1

En chaque point M de la surface de coupure, il faut remplacer la partie du solide manquant par une densité surfacique d'effort sur la coupure représentant l'action de ce dernier sur le solide isolé. Cette densité d'effort, définie localement en un point M et orientée par une normale sortante $\overrightarrow{n}$ est appelée le vecteur contrainte $\overrightarrow{T}(M, \overrightarrow{n})$. Le vecteur contrainte dépend linéairement du vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$. Il existe donc localement un opérateur linéaire reliant le vecteur contrainte sur un plan à sa normale, c'est le tenseur des contraintes σ, symétrique du second ordre. Il vient ainsi,

$$\overrightarrow{T}(M, \overrightarrow{n}) = \sigma(M).\overrightarrow{n}$$

La matrice du tenseur des contraintes, relative à la base $(\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$ prend la forme suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Il est usuel de représenter graphiquement le tenseur des contraintes dans le plan de Mohr, permettant de séparer les contraintes normales des contraintes de cisaillement. Si on désigne par τ la contrainte de cisaillement (portée par un vecteur $\overrightarrow{t}$) et σ_n la contrainte normale, on peut décomposer le vecteur contrainte en deux contributions :

$$\overrightarrow{T}(M, \overrightarrow{n}) = \sigma_n \overrightarrow{n} + \tau \overrightarrow{t}$$

Il existe un repère particulier dans lequel le tenseur des contraintes est diagonal, c'est le repère principal des contraintes. En notant σ_1, σ_2 et σ_3 les 3 contraintes principales, avec $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, le domaine d'admissibilité du vecteur contrainte est défini par les 3 inéquations suivantes, définissant un ensemble de cercles.

$$\begin{aligned}
\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geqslant 0 \\
\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) \leqslant 0 \\
\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Dans le plan de Mohr, l'admissibilité de la contrainte est visualisée par la zone grisée ci-après.

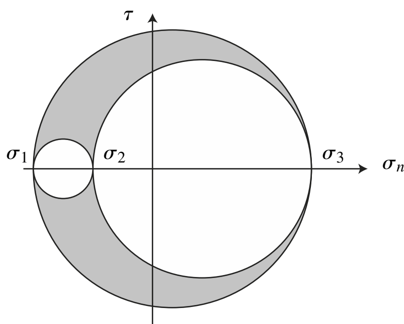


Figure 1.2

Pour un état plan de contrainte, si on désigne par θ, l'angle entre le repère principal des contraintes et le repère dans lequel la matrice du tenseur des contraintes est exprimée, la relation entre les contraintes principales et les différents termes du tenseur des contraintes est

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}.\cos(2\theta)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}.\cos(2\theta)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}.\sin(2\theta)$$

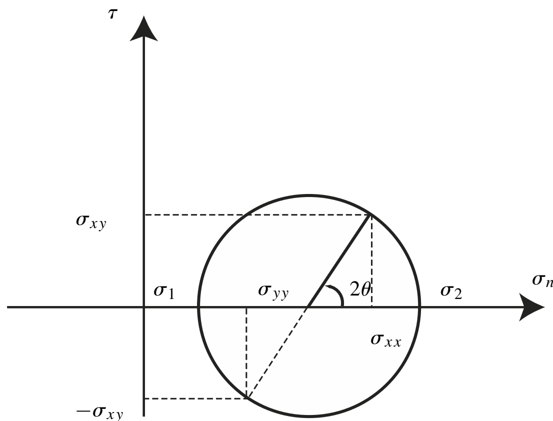


Figure 1.3

1.1.2 La déformation

La déformation est la variation relative de longueur d'un solide lorsque ce dernier est soumis à une action extérieure. Le tenseur des déformations, sous l'hypothèse des Petites Perturbations est la partie symétrique du gradient du champ de déplacement $\overrightarrow{U}(u_x, u_y, u_z)$.

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}\overrightarrow{U} + \mathbf{grad}^T\ \overrightarrow{U})$$

Dans la base $(\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$, le tenseur symétrique du second ordre se calcule de la manière suivante :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

1.1.3 La loi de comportement

La relation liant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations est la loi de comportement. Sous l'Hypothèse de Petites Perturbations, pour un matériau homogène, linéaire et isotrope, la loi de comportement est un opérateur linéaire du 4ième ordre. La loi d'élasticité, ou loi de Hooke introduit 2 paramètres matériaux : le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν. La relation tensorielle s'exprime comme suit :

$$\epsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma \;.\; \mathrm{Id}$$

Id est le tenseur identité, $\mathrm{tr}\,\sigma$ désigne la trace de σ. À l'inverse, la relation exprimant la contrainte à la déformation, en fonction des coefficients de Lamé (λ et μ) est :

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda\,\mathrm{tr}\,\epsilon \;.\; \mathrm{Id}$$

Les paramètres d'élasticité et les coefficients de Lamé sont liés par les relations :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

En écrivant les tenseurs des contraintes et déformations en vecteur colonne de taille 6, on peut exprimer la loi de Hooke de manière matricielle, plus simple d'interprétation.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

Dans un cas de chargement bidimensionnel, la loi de comportement se retrouve sous forme simplifiée et condensée. Dans un cas d'hypothèse de

contraintes planes :

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{array} \right\}$$

Sous l'hypothèse de déformation plane :

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{ccc} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{array} \right\}$$

1.1.4 Définitions et hypothèses en mécanique des structures

La théorie des poutres consiste à associer à la mécanique des milieux continus des hypothèses statiques, géométriques et cinématiques permettant de réduire la taille du problème à étudier.

a) La géométrie et le matériau

Une poutre est un élément particulier de structure décrit par une surface plane Σ appelée section droite de centre de gravité G. La ligne moyenne de la poutre Γ est formée par les différentes positions du centre de gravité G de la poutre lorsque lorsque l'on parcourt cette dernière selon toute sa longueur L. Si Σ est petit devant L alors l'état de contrainte σ ainsi que le champ de déplacement $\overrightarrow{U}$ du solide pourront être approximés en fonction de quantités exprimées uniquement le long de Γ.

Si Γ est une droite, la poutre est dite *droite*. Si γ est dans un plan, la poutre est dite *plane*. Dans les autres cas, la poutre est dite *courbe*.

Le matériau constituant la poutre est homogène, isotrope élastique linéaire.

b) Les hypothèses cinématiques

Les déplacements, rotations et déformations sont supposés petits. La poutre, de part ses équations d'équilibre, sera donc étudiée dans sa configuration de référence. C'est l'hypothèses des Petites Perturbations.

L'hypothèse d'Euler-Bernoulli suppose que, pour toutes transformations géométriques, les sections droites d'une poutre restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne. Cette hypothèse permet de définir le déplacement $\overrightarrow{U}_P$ de tout point P, d'une section droite uniquement en fonction du déplacement du centre de gravite $\overrightarrow{U}_G$ et de la rotation de la section droite $\overrightarrow{\Theta}(s)$ à l'abscisse curviligne s.

$$\overrightarrow{U}_P(s) = \overrightarrow{U}_G(s) + \overrightarrow{\Theta}(s) \wedge \overrightarrow{GP}$$

Dans le cas d'une poutre droite, l'abscisse curviligne est confondue avec l'axe x, le champ de déplacement $\overrightarrow{U}(u_x, u_y, u_z)$ de tout point P(x, y, z) peut ainsi être obtenu par :

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_x + \theta_y(x).z - \theta_z(x).y \\ u_y(x, y, z) &= u_y - \theta_x(x).z \\ u_z(x, y, z) &= u_z + \theta_x(x).y \end{aligned}$$

Dans la suite, nous définirons la courbure χ par $\chi = d\Theta/dx$.

Les déformations non nulles sont données par :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}(x, y, z) &= \frac{\partial u_x(x)}{\partial x} + \chi_y(x).z - \chi_z(x).y \\ 2\epsilon_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial u_y(x)}{\partial x} - \theta_z(x) - \chi_x(x).z \\ 2\epsilon_{xz}(x, y, z) &= \frac{\partial u_z(x)}{\partial x} + \theta_y(x) + \chi_x(x).y \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse que les déformations de cisaillement sont nulles (hypothèse d'Euler-Bernoulli), on peut définir la rotation θ d'une section droite

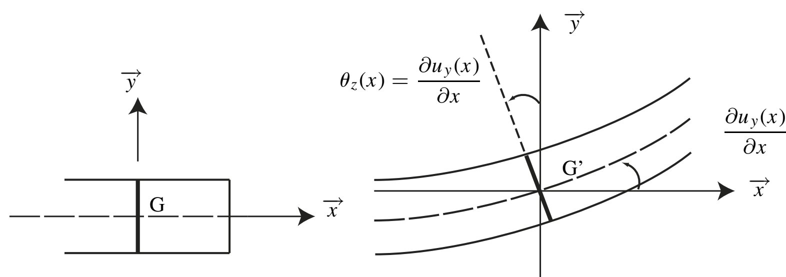


Figure 1.4

par :

$$\theta_z(x) = \frac{\partial u_y(x)}{\partial x}$$

$$\theta_y(x) = -\frac{\partial u_z(x)}{\partial x}$$

si de plus, la poutre ne subit pas de torsion ($\theta_x(x) = 0$), alors le tenseur de déformations est uniaxial et il reste :

$$\epsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u_x(x)}{\partial x} + \chi_y(x).z - \chi_z(x).y$$

$$2\epsilon_{xy}(x, y, z) = 0$$

$$2\epsilon_{xz}(x, y, z) = 0$$

c) Efforts de cohésion et hypothèses statiques

L'hypothèse de Barré de Saint Venant suppose que pour une section droite quelconque, suffisamment éloignée du point d'application des efforts extérieurs sur une poutre, les effets de ce même chargement peuvent être remplacés par un torseur équivalent s'appliquant à cette section droite. Pour une section droite quelconque, le tenseur des contraintes en un point P prendra

la forme suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le torseur des contraintes généralisées, par application du principe fondamental de la statique est défini par une composante en efforts $\overrightarrow{R}$ et une composante en moments $\overrightarrow{M}$.

$$\overrightarrow{R} = N\overrightarrow{x} + V_y\overrightarrow{y} + V_z\overrightarrow{z}$$
$$\overrightarrow{M} = M_x\overrightarrow{x} + M_y\overrightarrow{y} + M_z\overrightarrow{z}$$

N est l'effort normal, V_y et V_z sont respectivement les efforts tranchants selon les directions y et z. M_x est le moment de torsion, M_y et M_z sont les moments de flexion autour des directions y et z. L'expression de ces actions de liaison s'obtient par intégration des contraintes dans la section droite.

$$N = \int_\Sigma \sigma_{xx} dydz$$
$$V_y = \int_\Sigma \sigma_{xy} dydz$$
$$V_z = \int_\Sigma \sigma_{xz} dydz$$
$$M_x = \int_\Sigma (\sigma_{xz} y - \sigma_{xy} z) dydz$$
$$M_y = \int_\Sigma \sigma_{xx} z dydz$$
$$M_z = \int_\Sigma -\sigma_{xx} y dydz$$

1.1.5 Équations d'équilibre d'un élément de poutre

En isolant un tronçon de poutre, on peut établir les équations différentielles d'équilibre d'une poutre en terme de contraintes généralisées. Pour une

flexion dans le plan (x, y), 3 équations d'équilibre sont obtenues.

$$\frac{dN(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = -V(x)$$

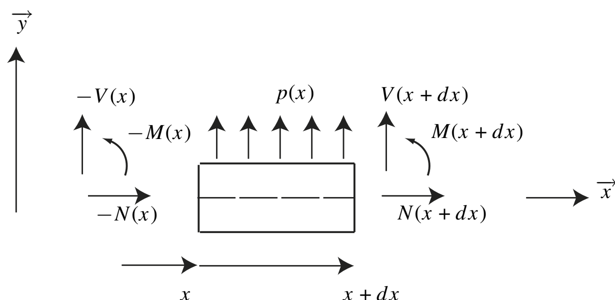


Figure 1.5

1.2 ÉTUDES DES POUTRES SOUS DIVERSES SOLLICITATIONS

1.2.1 Lois de comportement généralisées pour les poutres

En mécanique des structures, on distingue certaines actions de base ainsi que leurs combinaisons. Par définition,

- traction ou compression : $N \neq 0$, $V_y = V_z = 0$ et $M_x = M_y = M_z = 0$
- flexion pure : $M_y \neq 0$ ou $M_z \neq 0$, $N = 0$, $V_y = V_z = 0$ et $M_x = 0$
- flexion simple : $M_y \neq 0$ et $V_z \neq 0$ ou $M_z \neq 0$ et $V_y \neq 0$, $N = 0$ et $M_x = 0$

– flexion composée : $N \neq 0$, $M_y \neq 0$ et $V_z \neq 0$ ou $M_z \neq 0$ et $V_y \neq 0$, $M_x = 0$
– flexion déviée : $M_y \neq 0$, $V_z \neq 0$ et $M_z \neq 0$, $V_y \neq 0$, $N = 0$ et $M_x = 0$
– flexion composée déviée : $N \neq 0$, $M_y \neq 0$, $V_z \neq 0$ et $M_z \neq 0$, $V_y \neq 0$, $M_x = 0$
– torsion : $M_x \neq 0$, $N = 0$, $V_y = V_z = 0$ et $M_y = M_z = 0$

Les effets des 3 actions de base sont étudiés dans les paragraphes suivants.

a) L'effort normal dans une poutre

On considère une poutre droite (barre) isostatique de module d'Young E, de longueur L et de section $S(x)$ soumise à un effort normal N_{ext}. L'effort normal est constant le long de la barre et vaut $N(x) = N_{\text{ext}}$. La contrainte est constante le long de la barre et dans la section droite et vaut : $\sigma_{xx} = N_x(x)/S$. Par la loi de comportement, $\epsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E = N(x)/ES(x)$. La déformation latérale, dans les directions z et y vaut $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu\epsilon_{xx}$. Considérant la relation entre le déplacement axial et la déformation axiale, nous pouvons exprimer la loi de comportement généralisée d'une poutre sous un effort axial centré :

$$N = ES(x)\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Le déplacement en tout point d'une barrre s'obtient par intégration :

$$u(x) = \int_0^L \frac{N}{ES(x)} dx$$

b) Le moment fléchissant dans une poutre

Considérant une flexion plane selon la direction $\overrightarrow{y}$, l'hypothèse d'Euler-Bernoulli permet d'obtenir le profil des déformations axiales le long de la section droite :

$$\epsilon_{xx} = -\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \cdot y = -\chi_z \cdot y$$

Utilisant la loi de comportement uniaxiale reliant la contrainte et la déformation ainsi que la définition d'une contrainte généralisée de flexion, nous pouvons exprimer le moment fléchissant dans une section Σ d'abscisse x par :

$$M_z = \int_{\Sigma} E\chi_z \, . \, y^2 ds$$

Soit, en introduisant la définition du moment d'inertie quadratique $I_z = \int_{\Sigma} y^2 ds$, la loi de comportement généralisée d'une poutre en flexion :

$$M_z = EI_z\chi_z$$

Pour deux sections infiniment voisines, sous l'hypothèse des petits déplacements et petites déformations, on peut assimiler la courbure de la poutre à la dérivée de la rotation, soit à la dérivée seconde du déplacement :

$$M_z = EI_z \frac{\partial^2 u_y(x)}{\partial x^2}$$

La contrainte normale, en fonction du moment fléchissant, est obtenue en tout point de la poutre par :

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{M_z(x)y}{I_z}$$

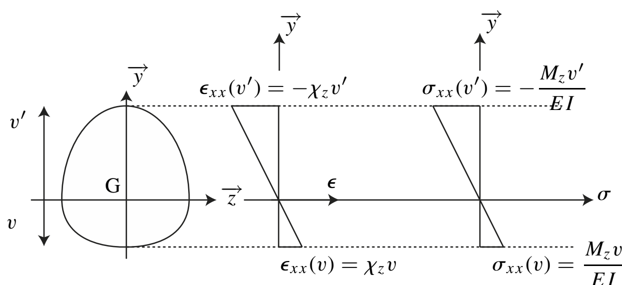


Figure 1.6

Les distributions de la déformation et de la contrainte normale le long de la section sont linéaires.

c) Le moment de torsion dans une poutre

Considérons une poutre de section circulaire (pleine ou évidée), de rayon R soumise à un moment de Torsion constant M_x. La contrainte de cisaillement en tout point P, repéré par sa distance r au centre de gravité G de la section est obtenue par :

$$\tau = \frac{M_x r}{J}$$

avec J le moment quadratique de torsion ($J = \pi R^4/2$, pour une section pleine et $J = \pi(R_1^4 - R_2^4)/2$ pour une section évidée de rayon intérieur R_2).

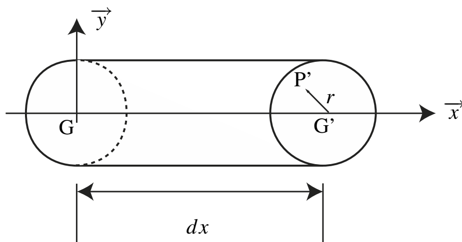


Figure 1.7

Le déplacement relatif de deux sections voisines distantes de dx est une rotation $d\theta$ autour de l'axe $\overrightarrow{x}$. En introduisant le module de cisaillement du matériau G, la loi de comportement généralisée d'une poutre en torsion est :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_x}{GJ}$$

Pour toute section droite autre que circulaire, l'expression de la contrainte et de la loi de comportement généralisée doit prendre en compte le gauchissement des sections.

- *Section rectangulaire*

En considérant une section rectangulaire de hauteur h et d'épaisseur e (avec $e < h$), la contrainte de cisaillement maximum vaut $\tau_{\max} = M_x/k_1 h e^2$ et la

loi de comportement généralisée s'exprime par :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_x}{Gk_2he^3}$$

Les valeurs de k_1 et k_2 peuvent être estimées à l'aide du tableau suivant :

h/e	1	1.5	2.0	2.5	3	4	5	10	∞
k_1	0.208	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.291	0.312	1/3
k_2	0.141	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312	1/3

• *Profilés minces ouverts*

Pour des poutres dont les sections droites s'apparentent à un I ou un U, les contraintes maximales peuvent être approximées de la manière suivante, pour les contraintes de cisaillement maximum dans l'âme :

$$\tau_{1\,\max} = \frac{3M_xe_1}{h_1e_1^3 + 2h_2e_2^3}$$

Dans l'aile du profilé : $$\tau_{2\,\max} = \frac{3M_xe_2}{h_1e_1^3 + 2h_2e_2^3}$$

La loi de comportement généralisée s'exprime par : $$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{3M_x}{G(h_1e_1^3 + 2h_2e_2^3)}$$

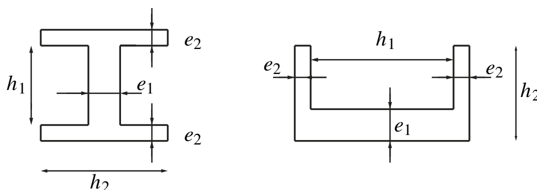


Figure 1.8

• *Tube mince ouvert*

De manière analogue aux sections rectangulaires étroites, lorsque le rapport h/e tend vers l'infini :

$$\tau_{\max} = \frac{3M_x}{he^2} \qquad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{3M_x}{Ghe^3}$$

• *Tube mince fermé*

Pour un tube mince fermé, le flux de cisaillement le long du tube est constant, de même donc pour la contrainte de cisaillement. En dénommant Γ la ligne moyenne du tube, et S l'aire délimitée par cette ligne moyenne, on peut calculer la contrainte de cisaillement par :

$$\tau = \frac{M_x}{2Se}$$

et la loi de comportement généralisée :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_x}{GJ}$$

avec $J = 4S^2 / \int_\Gamma ds/e$

1.2.2 Poutre en flexion simple

En flexion simple, viennent se superposer aux contraintes normales engendrées par le moment fléchissant, les contraintes de cisaillement liées à la présence d'un effort tranchant non-nul à l'abscisse x de la poutre. Pour une section droite quelconque, de moment quadratique I_z, la contrainte de cisaillement, en tout point y de cette section s'obtient en figure 1.9.

$b(y)$ est la largeur de la poutre à la côte y et $\mathcal{H}(y)$ est le moment statique de la section au dessus de la côte y. Pour une section rectangulaire (largeur b et hauteur h), le profil des contraintes de cisaillement est parabolique, nul aux bords et maximum au centre :

$$\tau(y) = \frac{3V_y(x)}{2bh}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

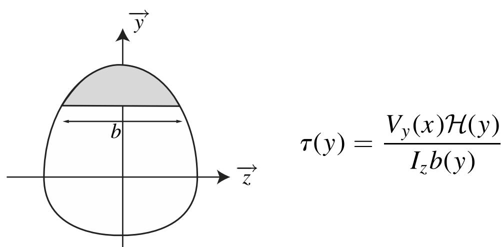


Figure 1.9

Le diagramme des contraintes reste linéaire dans la section : $\sigma_{xx}(x, y) = -M_z(x)y/I_z$.

1.2.3 Poutre en flexion déviée

Lorsque l'axe du moment fléchissant extérieur ne correspond pas avec l'un des axes principaux d'inertie de la section, il est nécessaire de décomposer ce dernier en deux composantes, selon les axes principaux d'inertie de la section afin de procéder au calcul des contraintes par superposition. Ainsi, la contrainte normale pourra être obtenue par :

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{M_y(x)z}{I_y} - \frac{M_z(x)y}{I_z}$$

Si une section droite est repérée par un sytème de coordonnées $x'y'z'$, Les axes principaux d'inertie d'une section droite portée par la normale $\vec{x}'$ sont obtenues par une rotation d'un angle α autour de x' tel que :

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{y'z'}}{I_{z'} - I_{y'}}$$

1.2.4 Poutre en flexion composée

Lorsqu'aux actions de flexion se rajoute une composante d'effort normal, nous parlerons de flexion composée. La contrainte normale est obtenue par

superposition des différents termes :

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{N}{S} + \frac{M_y(x)z}{I_y} - \frac{M_z(x)y}{I_z}$$

Dans certains cas, il peut être intéressant de remarquer que le sytème d'effort est équivalent à un effort unique appliqué dans le plan de la section appelé le « centre de pression ». La position de ce centre de pression est $y_1 = -M_z/N$ et $z_1 = M_y/N$. Si le centre de pression est à l'intérieur « du noyau central » de la section, alors toutes les contraintes normales sont de même signe, quelque soit le point de la section droite considéré. À l'inverse, si le centre de pression est en dehors du noyau central, alors les contraintes normales de part et d'autres de la section droite seront de signes contraires. La limite du noyau central est obtenue en faisant coïncider l'axe neutre de la poutre avec le contour de la section droite.

Prenons l'exemple d'une poutre rectangulaire ne subissant qu'un moment de flexion M_z et un effort normal N. La position du centre de pression repérée par ses coordonnées $z_1 = 0$ et $y_1 = -M_z/N$ permet de calculer la contrainte en tout point, sachant que $I_z = bh^3/12$:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{bh} + \frac{6M_z}{bh^2}$$

Pour les bords les plus sollicités :

$$\sigma_{xx}(y_1) = \frac{N}{S}\left(1 + 6\frac{y_1}{h}\right)$$

$$\sigma_{xx}(-y_1) = \frac{N}{S}\left(1 - 6\frac{y_1}{h}\right)$$

La frontière du noyau central, dans ce cas, est obtenue en imposant $\sigma_{xx} = 0$ en $y = y_1$ et $y = -y_1$, soit $h/6$ et $-h/6$. La même étude peut être effectuée pour une flexion selon z due à un moment M_y permettant de définir pour limite du noyau central $b/6$ et $-b/6$. La forme du noyau central pour une section rectangulaire est un losange centré sur G, de dimension $h/3$ et $b/3$.

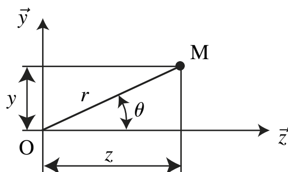
Chapitre 2

Caractéristiques des sections

2.1 PRÉAMBULE

Les calculs des différentes intégrales se font dans un repère cartésien ou dans un repère cylindrique.

	Coordonnées du point	Surface infinitésimale *ds*
Repère cartésien	(y, z)	$dy\,dz$
Repère cylindrique	(r, θ)	$r\,dr\,d\theta$



$$z = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$r^2 = y^2 + z^2$$

Figure 2.1

2.2 DÉFINITIONS

2.2.1 Surface

Surface de la section (Σ) :

$$\boxed{S = \iint_{\Sigma} ds} \qquad [\mathrm{m}^2]$$

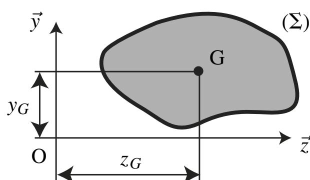


Figure 2.2

2.2.2 Centre de gravité

Position du centre de gravité de la section (Σ) par rapport à l'axe O$\vec{y}$:

$$\boxed{y_G = \frac{\iint_{\Sigma} y\, ds}{\iint_{\Sigma} ds} = \frac{\mathcal{H}_{Oz}}{S}} \qquad [\mathrm{m}]$$

Position du centre de gravité de la section (Σ) par rapport à l'axe O$\vec{z}$:

$$\boxed{z_G = \frac{\iint_{\Sigma} z\, ds}{\iint_{\Sigma} ds} = \frac{\mathcal{H}_{Oy}}{S}} \qquad [\mathrm{m}]$$

2.2.3 Moment statique

Moment statique de la section (Σ) par rapport à l'axe O$\vec{y}$:

$$\boxed{\mathcal{H}_{Oy} = \iint_{\Sigma} z\, ds} \qquad [\mathrm{m}^3]$$

Moment statique de la section (Σ) par rapport à l'axe O$\vec{z}$:

$$\boxed{\mathcal{H}_{Oz} = \iint_{\Sigma} y\, ds} \qquad [\text{m}^3]$$

Propriétés

– *Le moment statique d'une surface est nul par rapport à un axe passant par son centre de gravité.*
– *Le moment statique d'une surface est égal au produit de sa surface par la distance de son centre de gravité :*

$$\mathcal{H}_{Oy} = S\, z_G \qquad \mathcal{H}_{Oz} = S\, y_G$$

2.2.4 Moment d'inertie

Moment d'inertie (ou moment quadratique) de la section (Σ) par rapport à l'axe O$\vec{y}$:

$$\boxed{I_{Oy} = \iint_{\Sigma} z^2\, ds} \qquad [\text{m}^4]$$

Moment d'inertie de la section (Σ) par rapport à l'axe O$\vec{z}$:

$$\boxed{I_{Oz} = \iint_{\Sigma} y^2\, ds} \qquad [\text{m}^4]$$

Propriétés

– *Les moments d'inertie sont toujours positifs.*
– *Les moments d'inertie sont minimaux au centre de gravité de la section (voir le théorème d'Huygens en 2.3.1 pour l'explication).*

2.2.5 Produit d'inertie

Produit d'inertie de la section (Σ) par rapport aux axes O$\vec{y}$ et O$\vec{z}$:

$$\boxed{I_{Oyx} = \iint_{\Sigma} yz\, ds} \qquad [\text{m}^4]$$

2.2.6 Moment polaire

Moment polaire de la section (Σ) par rapport à l'axe $O\vec{x}$:

$$\boxed{I_O = \iint_\Sigma r^2\,ds} \qquad [\text{m}^4]$$

Propriétés

– *Le moment polaire est toujours positif.*
– *Relation entre le moment polaire et les moments quadratiques :*

$$I_O = \iint_\Sigma r^2\,ds = \iint_\Sigma (y^2 + z^2)\,ds = I_{Oy} + I_{Oz}$$

2.2.7 Axes principaux d'inertie

Le repère formé par les axes principaux d'inertie $G\vec{Y}$ et $G\vec{Z}$ est tel que :

- Le produit d'inertie est nul dans ce repère.
- Les moments d'inertie sont respectivement maximal par rapport à un axe et minimal par rapport à l'autre. Ces moments sont alors appelés moments principaux d'inertie.

Propriétés

– *Si la section possède un axe de symétrie, cet axe est un axe principal d'inertie.*
– *Si la section possède deux axes de symétrie, ces axes sont des axes principaux d'inertie.*

2.2.8 Rayon de giration

Rayon de giration d'une surface (Σ) par rapport à l'axe $O\vec{y}$:

$$\boxed{i_{Oy} = \sqrt{\frac{I_{Oy}}{S}}} \qquad [\text{m}]$$

Rayon de giration d'une surface (Σ) par rapport à l'axe $O\vec{z}$:

$$\boxed{i_{Oz} = \sqrt{\frac{I_{Oz}}{S}}} \qquad [\text{m}]$$

2.3 THÉORÈMES ET PROPRIÉTÉS

2.3.1 Théorème de Huygens

Connaissant les inerties d'une surface dans un repère $(G,\vec{y},\vec{z})$, le théorème de Huygens permet d'exprimer les inerties dans un repère d'axes parallèles $(O,\vec{y},\vec{z})$. La réciproque est naturellement vraie.

$$I_{Oy} = I_{Gy} + S\,z_G^2$$
$$I_{Oz} = I_{Gz} + S\,y_G^2$$
$$I_{Oyz} = I_{Gyz} + S\,y_G\,z_G$$

2.3.2 Changement de repère

a) Repère orienté par un angle α

On considère le repère $(O\vec{z}_1,\ O\vec{y}_1)$ orienté par un angle α par rapport au repère $(O\vec{z},\ O\vec{y})$. Les coordonnées d'un point dans ce nouveau repère sont :

$$y_1 = -\sin(\alpha)z + \cos(\alpha)y$$
$$z_1 = \cos(\alpha)z + \sin(\alpha)y$$

Les moments d'inertie d'une section dans le nouveau repère s'écrivent :

$$I_{Gy_1} = \frac{1}{2}(I_{Gz} + I_{Gy}) + \frac{1}{2}(I_{Gz} - I_{Gy})\cos(2\alpha) + I_{Gyz}\sin(2\alpha)$$
$$I_{Gz_1} = \frac{1}{2}(I_{Gz} + I_{Gy}) - \frac{1}{2}(I_{Gz} - I_{Gy})\cos(2\alpha) - I_{Gyz}\sin(2\alpha)$$

Le produit d'inertie est :

$$I_{Gy_1z_1} = \frac{1}{2}(I_{Gz} - I_{Gy})\sin(2\alpha) + I_{Gyz}\cos(2\alpha)$$

b) Repère principal d'inertie

L'angle α entre le repère principal d'inertie $O\vec{Z}$ et $O\vec{Y}$ et le repère $(O\vec{z}, O\vec{y})$ est :

$$\tan(2\alpha) = \frac{2I_{Gyz}}{I_{Gy} - I_{Gz}}$$

Les moments d'inertie principaux, respectivement maximal et minimal, sont :

$$I_{\max} = \frac{1}{2}\left(I_{Gy} + \sqrt{\left(I_{Gz} - I_{Gy}\right)^2 + 4I_{Gyz}}\right)$$

$$I_{\min} = \frac{1}{2}\left(I_{Gz} - \sqrt{\left(I_{Gz} - I_{Gy}\right)^2 + 4I_{Gyz}}\right)$$

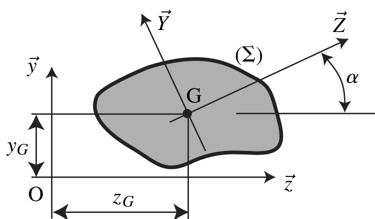


Figure 2.3

2.3.3 Décomposition d'une surface

Une section (Σ) peut être décomposée en n sections élémentaires $(\mathcal{S}_i)$, $i \in \{1, .., n\}$. Les caractéristiques géométriques de la section (Σ) peuvent être calculées à partir de la somme algébrique des caracteristiques géométriques des sections $(\mathcal{S}_i)$, en utilisant si nécessaire le théorème de Huygens pour le transport des inerties.

Exemple. Calcul des caractéristiques d'une cornière en L

$$(\Sigma) = (\mathcal{S}_1) + (\mathcal{S}_2) - (\mathcal{S}_3)$$

	(Σ)	$(\mathcal{S}_1)$	$(\mathcal{S}_2)$	$(\mathcal{S}_3)$
Section	$e(h+b-e)$	he	be	e^2
Moment statique $/O\vec{z}$	$\frac{e}{2}(h^2+be-e^2)$	$\frac{eh^2}{2}$	$\frac{be^2}{2}$	$\frac{e^3}{2}$
Moment d'inertie $/O\vec{z}$	$\frac{e}{3}(h^3+be^2-e^3)$	$\frac{eh^3}{3}$	$\frac{be^3}{3}$	$\frac{e^4}{3}$

Tableau 2.1

Coordonnées du centre de gravité de la surface (Σ) :

$$y_G^{(\Sigma)} = \frac{\mathcal{H}_{Oz}^{(\mathcal{S}_1)} + \mathcal{H}_{Oz}^{(\mathcal{S}_2)} - \mathcal{H}_{Oz}^{(\mathcal{S}_3)}}{S^{(\Sigma)}} = \frac{h^2+be-e^2}{2(h+b-e)}$$

$$z_G^{(\Sigma)} = \frac{\mathcal{H}_{Oy}^{(\mathcal{S}_1)} + \mathcal{H}_{Oy}^{(\mathcal{S}_2)} - \mathcal{H}_{Oy}^{(\mathcal{S}_3)}}{S^{(\Sigma)}} = \frac{he+b^2-e^2}{2(h+b-e)}$$

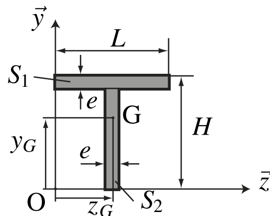
2.4 CARACTÉRISTIQUES DES PRINCIPALES SECTIONS

Géométrie	Section	Centre de gravité	Moment statique	Moment quadratique
	$S = a^2$	$z_G = \frac{a}{2}$ $y_G = \frac{a}{2}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \frac{a^3}{2}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \frac{a^3}{2}$	$I_{Gz} = \frac{a^4}{12}$ $I_{Gy} = \frac{a^4}{12}$
	$S = A^2 - a^2$	$z_G = \frac{A}{2}$ $y_G = \frac{A}{2}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \frac{A^3 - a^2 A}{2}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \frac{A^3 - a^2 A}{12}$	$I_{Gz} = \frac{A^4 - a^4}{12}$ $I_{Gy} = \frac{A^4 - a^4}{12}$
	$S = bh$	$z_G = \frac{b}{2}$ $y_G = \frac{h}{2}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \frac{bh^2}{2}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \frac{b^2 h}{2}$	$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{Gy} = \frac{hb^3}{12}$
	$S = BH - bh$	$z_G = \frac{B}{2}$ $y_G = \frac{H}{2}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \frac{BH^2 - bhH}{2}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \frac{B^2 H - bhB}{2}$	$I_{Gz} = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $I_{Gy} = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$
	$S = BH - h(B - b)$	$z_G = \frac{B}{2}$ $y_G = \frac{H}{2}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \frac{BH^2 - hH(B - b)}{2}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \frac{B^2 H - hB(B - b)}{2}$	$I_{Gz} = \frac{BH^3 - h^3(B - b)}{12}$ $I_{Gy} = \frac{B^3 H - h(B^3 - b^3)}{12}$
	$S = BH - h(B - b)$	$z_G = \frac{B}{2}$ $y_G = \frac{H_{Oz}}{S}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \frac{BH^2 - h^2(B - b)}{2}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \frac{B^2 H - hB(B - b)}{2}$	$I_{Gz} = \frac{BH^3 - h^3(B - b)}{3} - y_G^2 S$ $I_{Gy} = \frac{B^3 H - h(B^3 - b^3)}{12}$

Géométrie	Section	Centre de gravité	Moment statique	Moment quadratique
	$S = BH - h(B-b)$	$z_G = \dfrac{H_{Oy}}{S}$ $y_G = \dfrac{H_{Oz}}{S}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \dfrac{(B-b)h'^2 + bH^2}{2}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \dfrac{B^2h' + hb^2}{2}$	$I_{Gz} = \dfrac{(B-b)h'^3 + bH^3}{3} - y_G^2 S$ $I_{Gy} = \dfrac{h'B^3 + hb^3}{3} - z_G^2 S$
	$S = BH - h(B-b)$	$z_G = B - \dfrac{b}{2}$ $y_G = \dfrac{H}{2}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \dfrac{BH^2 - hH(B-b)}{2}$ $\mathcal{H}_{Oy} = z_G S$	$I_{Gz} = \dfrac{BH^3 - h^3(B-b)}{12}$ $I_{Gy} = \dfrac{2hb^3 + (H-h)(2B-b)^3}{24}$
	$S = \dfrac{1}{2}bh$	$z_G = \dfrac{b}{3}$ $y_G = \dfrac{h}{3}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \dfrac{bh^2}{6}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \dfrac{b^2h}{6}$	$I_{Gz} = \dfrac{bh^3}{36}$ $I_{Gy} = \dfrac{hb^3}{36}$
	$S = \dfrac{\pi d^2}{4}$	$z_G = \dfrac{d}{2}$ $y_G = \dfrac{d}{2}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \dfrac{\pi d^3}{8}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \dfrac{\pi d^3}{8}$	$I_{Gz} = \dfrac{\pi D^4}{64}$ $I_{Gy} = \dfrac{\pi D^4}{64}$
	$S = \dfrac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$	$z_G = \dfrac{D}{2}$ $y_G = \dfrac{D}{2}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \dfrac{\pi(D^3 - d^2D)}{8}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \dfrac{\pi(D^3 - d^2D)}{8}$	$I_{Gz} = \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$ $I_{Gy} = \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$
	$S = \dfrac{\pi d^2}{8}$	$z_G = \dfrac{d}{2}$ $y_G = \dfrac{2d}{3\pi}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \dfrac{d^3}{12}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \dfrac{\pi d^3}{16}$	$I_{Gz} = \dfrac{d^4}{16}\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{8}{9\pi}\right)$ $I_{Gy} = \dfrac{\pi d^4}{128}$

Géométrie	Section	Centre de gravité	Moment statique	Moment quadratique
	$S = \frac{\pi r^2}{4}$	$z_G = \frac{4r}{3\pi}$ $y_G = \frac{4r}{3\pi}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \frac{r^3}{3}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \frac{r^3}{3}$	$I_{Gz} = \frac{r^4}{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$ $I_{Gy} = \frac{r^4}{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$
	$S = \frac{\pi ab}{4}$	$z_G = \frac{a}{2}$ $y_G = \frac{b}{2}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \frac{\pi ab^2}{8}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \frac{\pi a^2 b}{8}$	$I_{Gz} = \frac{\pi ab^3}{64}$ $I_{Gy} = \frac{\pi a^3 b}{64}$
	$S = 2eh - e^2$	$z_G = \frac{h}{2}$ $y_G = \frac{h}{2}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \frac{2eh^2 - e^2h}{2}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \frac{2eh^2 - e^2h}{2}$	$I_{Gz} = \frac{eh^3 + e^3h - e^4}{12}$ $I_{Gy} = \frac{eh^3 + e^3h - e^4}{12}$
	$S = \frac{h^2}{2}$	$z_G = \frac{h}{2}$ $y_G = \frac{h}{2}$	$\mathcal{H}_{Oz} = \frac{h^3}{4}$ $\mathcal{H}_{Oy} = \frac{h^3}{4}$	$I_{Gz} = \frac{h^4}{48}$ $I_{Gy} = \frac{h^4}{48}$

2.5 EXEMPLE : CARACTÉRISTIQUES D'UNE SECTION EN T



$e = 10$ mm
$H = 120$ mm
$L = 120$ mm

1. Surface :

$$S = S^{(S_1)} + S^{(S_2)} = e\,L + e\,(H - e)$$
$$= 10 \times 120 + 10 \times (120 - 10) = 2300\ \text{mm}^2$$

2. Moments statiques :

$$\mathcal{H}_{Oy} = \mathcal{H}_{Oy}^{(S_1)} + \mathcal{H}_{Oy}^{(S_1)}$$
$$= \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=H-e}^{y=H} z\ dy\ dz + \int_{z=L/2-e/2}^{z=L/2+e/2} \int_{y=0}^{y=H-e} z\ dy\ dz$$
$$= \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{120} [y]_{110}^{120} + \left[\frac{z^2}{2}\right]_{55}^{65} [y]_0^{110} = 138\,000\ \text{mm}^3$$

$$\mathcal{H}_{Oz} = \mathcal{H}_{Oz}^{(S_1)} + \mathcal{H}_{Oz}^{(S_1)}$$
$$= \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=H-e}^{y=H} y\ dy\ dz + \int_{z=L/2-e/2}^{z=L/2+e/2} \int_{y=0}^{y=H-e} y\ dy\ dz$$
$$= [z]_0^{120} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{110}^{120} + [z]_{55}^{65} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{110} = 198\,500\ \text{mm}^3$$

3. Centre de gravité :

$$y_G = \frac{\mathcal{H}_{Oz}}{S} = 86,3\ \text{mm} \qquad z_G = \frac{\mathcal{H}_{Oy}}{S} = 60\ \text{mm}$$

4. Moments d'inertie :

– Au point O :

$$I_{Oy} = I_{Oy}^{(S_1)} + I_{Oy}^{(S_1)}$$
$$= \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=H-e}^{y=H} z^2\ dy\ dz + \int_{z=L/2-e/2}^{z=L/2+e/2} \int_{y=0}^{y=H-e} z^2\ dy\ dz$$
$$= \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{120} [y]_{110}^{120} + \left[\frac{z^3}{3}\right]_{55}^{65} [y]_0^{110} = 9,73 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

$$
\begin{aligned}
I_{Oz} &= I_{Oz}^{(S_1)} + I_{Oz}^{(S_1)} \\
&= \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=H-e}^{y=H} y^2 \, dy \, dz + \int_{z=L/2-e/2}^{z=L/2+e/2} \int_{y=0}^{y=H-e} y^2 \, dy \, dz \\
&= [z]_0^{120} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{110}^{120} + [z]_{55}^{65} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{110} = 20,3 \times 10^6 \text{ mm}^4
\end{aligned}
$$

– Au point G :

$$I_{Gy} = I_{Oy} - z_G^2 S = 1,45 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{Gz} = I_{Oz} - y_G^2 S = 3,19 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

5. Produit d'inertie :

$$
\begin{aligned}
I_{Oyz} &= I_{Oyz}^{(S_1)} + I_{Oyz}^{(S_1)} \\
&= \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=H-e}^{y=H} yz \, dy \, dz + \int_{z=L/2-e/2}^{z=L/2+e/2} \int_{y=0}^{y=H-e} yz \, dy \, dz \\
&= \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{120} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{110}^{120} + \left[\frac{z^2}{2}\right]_{55}^{65} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{110} = 11,9 \times 10^6 \text{ mm}^4
\end{aligned}
$$

6. Rayon de giration :

$$i_{Oy} = \sqrt{\frac{I_{Oy}}{S}} = 65,0 \text{ mm}$$

$$i_{Oz} = \sqrt{\frac{I_{Oz}}{S}} = 94,0 \text{ mm}$$

Chapitre 3

Théorèmes Généraux–Méthodes énergétiques

3.1 PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS – PTV

Soit un système de poutres en équilibre sollicité par des actions extérieures et tel que les liaisons soient parfaites.

Actions extérieures :

– forces de surface (ponctuelles ou réparties),
– forces à distance,
– forces de liaison (à priori inconnues).

On s'intéresse aux :

– efforts de liaison,
– déplacements,
– déformations,
– contraintes.

Restrictions :

– pas d'effet de la température,
– état initial non sollicité.

Pour déterminer l'état du système, on peut utiliser le premier principe de la thermodynamique (structure élastique, pas de dissipation).

Dans un référentiel galiléen et pour toute partition du système considéré, la somme du travail des forces extérieures $\mathcal{F}_{ext}$ et du travail des forces intérieures $\mathcal{F}_{int}$ calculée dans un champ de déplacement virtuel quelconque est égale à zéro.

$$\mathcal{W}^*_{\mathcal{F}_{ext}} + \mathcal{W}^*_{\mathcal{F}_{int}} = 0, \forall u^* \text{virtuel} \tag{3.1}$$

Pour utiliser ce principe, il faut :

– définir ce que signifie u^*
– expliciter le $\mathcal{W}^*_{\mathcal{F}}$

3.1.1 Champ de déplacement virtuel

A priori, u^* est quelconque mais dans la pratique on utilisera uniquement :

Champ cinématiquement admissible : champ de déplacement virtuel qui respecte les conditions de liaisons. u^* $\mathcal{C}.\mathcal{A}$. est continu, dérivable et tel que la déformée existe.

Champ rigidifiant : champ de déplacement virtuel tel que la déformée est nulle en tout point de la structure.

3.1.2 Définition du travail des forces dans le champ de déplacement virtuel

Travail des forces extérieures : si on note $\vec{F_i}$, $\vec{M_i}$ les forces et moments appliqués au point G_i et $\vec{u}^*_i$, $\vec{\omega}^*_i$ les déplacements et rotations de la section

en G_i, nous obtenons alors :

$$\mathcal{W}^*_{\mathcal{F}_{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \{\vec{F}_i \vec{u}^*_i + \vec{M}_i \vec{\omega}^*_i\} \tag{3.2}$$

Travail des forces intérieures : lié au travail de $\boldsymbol{\sigma}$ dans le champ de déformation virtuel : $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ déformation axiale, $\boldsymbol{\chi}^*$ courbure, $\boldsymbol{\gamma}^*$ déformation de cisaillement, $\boldsymbol{\theta}^*$ angle de torsion.

$$\mathcal{W}^*_{\mathcal{F}_{int}} = -\int_{structure} \left(N\boldsymbol{\varepsilon}^* + M\boldsymbol{\chi}^* + V\boldsymbol{\gamma}^* + M_x\boldsymbol{\theta}^*\right) \tag{3.3}$$

3.2 ÉGALITÉ DE CLAPEYRON

Le principe des travaux virtuels (PTV) est valable quelque soit u^*, en particulier on peut choisir pour champ virtuel le champ réel de déplacement. On obtient alors :

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}_{ext}} + \mathcal{W}_{\mathcal{F}_{int}} = 0 \tag{3.4}$$

$\underline{\mathcal{W}_{\mathcal{F}_{ext}}}$: les efforts et les déplacements ne sont pas indépendants, il faut donc prendre en compte l'histoire du chargement.

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}_{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\{\vec{F}_i \vec{u}_i + \vec{M}_i \vec{\omega}_i\} + \int \frac{1}{2}\vec{p}\vec{u}ds \tag{3.5}$$

$\underline{-\mathcal{W}_{\mathcal{F}_{int}}}$: potentiel interne W ou énergie de déformation élastique.

$$W = -\mathcal{W}_{\mathcal{F}_{int}} = \int_{structure} \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} + \frac{V^2}{GS_R} + \frac{M_x^2}{GJ}\right)ds \tag{3.6}$$

avec S_R : section réduite en cisaillement.

L'égalité de Clapeyron ne dépend que de l'état initial et de l'état final de la structure.

3.3 THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ DE MAXWELL-BETTI

Ce théorème se déduit de l'égalité de Clapeyron en considérant deux systèmes de chargement appliqués à la même structure.

Le travail produit par un système de chargement S_1 sur une structure dans le champ de déplacement dû à un système de chargement S_2 est égal au travail du système de chargement S_2 dans le champ de déplacement dû à S_1.

Cette égalité est donnée en produit scalaire. On ne pourra donc connaître que la composante du déplacement suivant la direction d'application de la force.

Le déplacement (ou la rotation) produit en i par une force (ou couple) unitaire agissant en j est égal au déplacement (ou la rotation) produit en j par la force (ou couple) unitaire agissant en i.

3.4 THÉORÈME DE CASTIGLIANO

Le théorème de Castigliano établit une relation entre les déplacements et le potentiel interne. Pour l'établir, on part de l'égalité de Clapeyron et on calcule plus explicitement le travail des forces extérieures.

La dérivée partielle du potentiel interne par rapport à une action quelconque est égale au déplacement du point d'application de cette action mesurée algébriquement sur la ligne d'action de celui-ci.

Pour une force ponctuelle F_k, le déplacement δ_k est ainsi :

$$\frac{\partial W}{\partial F_k} = \delta_k \tag{3.7}$$

Pour un moment ponctuel M_k, la rotation ω_k est ainsi :

$$\frac{\partial W}{\partial M_k} = \omega_k \tag{3.8}$$

En conséquence, si l'on souhaite calculer le déplacement δ (ou rotation ω) d'une section Σ d'une poutre dans une direction donnée, on applique

une force fictive F^* (ou moment fictif M^*) dans la section Σ suivant cette direction. On aura alors :

$$\delta = \left.\frac{\partial W}{\partial F^*}\right|_{F^*=0}$$
$$\omega = \left.\frac{\partial W}{\partial M^*}\right|_{M^*=0} \tag{3.9}$$

3.5 THÉORÈME DE MÉNABRÉA

Dans un système hyperstatique sur appui rigide, les réactions hyperstatiques dues aux liaisons surabondantes ne travaillent pas pendant la déformation du système. Les dérivées partielles du potentiel par rapport aux réactions hyperstatiques R_i sont donc nulles :

$$\frac{\partial W}{\partial R_i} = 0 \tag{3.10}$$

3.6 THÉORÈME DE MÜLLER-BRESLAU : FORMULE DE MOHR

Pour calculer le déplacement (ou la rotation) en un point P d'une structure $(\mathcal{S})$ isostatique sollicitée en flexion par un système de chargement extérieur, on procède de la manière suivante :

– on calcule les efforts intérieurs associés au chargement extérieur (*i.e.* M, N, V).
– on applique une charge unitaire $\bar{1}_P$ au point P dans le sens du déplacement recherché et on détermine les efforts intérieurs associés $(\bar{M}, \bar{N}, \bar{V})$.

Le déplacement (ou la rotation) recherché δ_P s'obtient par l'intégrale suivante :

$$\delta_P = \int_{\mathcal{S}} \left(\frac{M\bar{M}}{EI} + \frac{N\bar{N}}{ES} + \frac{V\bar{V}}{GS_R} \right) ds \tag{3.11}$$

Si le système est hyperstatique, on démontre que les efforts intérieurs $\bar{M}$, $\bar{N}$ et $\bar{V}$ peuvent être calculés sur n'importe quelle structure isostatique déduite de $\mathcal{S}$ en supprimant les liaisons hyperstatiques.

Dans la plupart des cas, les deux derniers termes de l'intégrale peuvent être négligés et l'on obtient :

$$\delta_P = \int_{\mathcal{S}} \frac{M\bar{M}}{EI} ds \tag{3.12}$$

➤ Calcul des intégrales de Mohr par une méthode simplifiée

Il s'agit d'une méthode simple lorsqu'un des diagrammes est linéaire (avec EI constant), voir la figure 3.1.

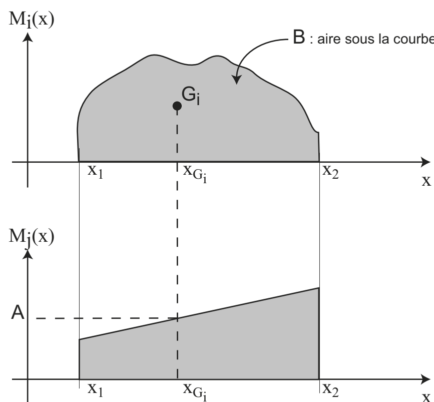


Figure 3.1

On obtient alors :

$$\frac{1}{EI}\int_{x_1}^{x_2} M_i(x)M_j(x)dx = A \times B \tag{3.13}$$

avec A la valeur dans le diagramme $M_j(x)$ (linéaire) au niveau du centre de gravité x_{G_i} du diagramme $M_i(x)$ et B l'aire sous la courbe $M_i(x)$.

$\int M_i M_j dx$	m, L	m1, m2, L	m1, -m2, L	m1, L	m2, L	m, αL, βL, L
M1, M2, L	$\frac{L}{2}m(M_1+M_2)$	$\frac{L}{6}(2M_1m_1+M_1m_2$ $+M_2m_1+2M_2m_2)$	$\frac{L}{6}(2M_1m_1-M_1m_2$ $+M_2m_1-2M_2m_2)$	$\frac{L}{6}m_1(2M_1+M_2)$	$\frac{L}{6}m_1(M_1+2M_2)$	$\frac{L}{6}m(M_1(1+\beta)$ $+M_2(1+\alpha))$
M1, -M2, L	$\frac{L}{2}m(M_1-M_2)$	$\frac{L}{6}(2M_1m_1+M_1m_2$ $-M_2m_1-2M_2m_2)$	$\frac{L}{6}(2M_1m_1-M_1m_2$ $-M_2m_1+2M_2m_2)$	$\frac{L}{6}m_1(2M_1-M_2)$	$\frac{L}{6}m_1(M_1-2M_2)$	$\frac{L}{6}m(M_1(1+\beta)$ $-M_2(1+\alpha))$
M1, L	$\frac{L}{2}M_1m$	$\frac{L}{6}M_1(2m_1+m_2)$	$\frac{L}{6}M_1(2m_1-m_2)$	$\frac{L}{3}M_1m_1$	$\frac{L}{6}M_1m_2$	$\frac{L}{6}M_1m(1+\beta)$

$\int M_i M_j dx$	m, L	m1, m2, L	m1, -m2, L	m1, L	m2, L	m, αL, βL, L
M2, L	$\frac{L}{2}M_2m$	$\frac{L}{6}M_2(m_1+2m_2)$	$\frac{L}{6}M_2(m_1-2m_2)$	$\frac{L}{6}M_2m_1$	$\frac{L}{3}M_2m_2$	$\frac{L}{6}M_2m(1+\alpha)$
M, αL, βL, L	$\frac{L}{2}Mm$	$\frac{L}{6}M(m_1(1+\beta)$ $+m_2(1+\alpha))$	$\frac{L}{6}M(m_1(1+\beta)$ $-m_2(1+\alpha))$	$\frac{L}{6}Mm_1(1+\beta)$	$\frac{L}{6}Mm_2(1+\alpha)$	$\frac{L}{12}Mm\frac{3-4\alpha^2}{\beta}$ pour $\alpha < \beta$
M1, L	$\frac{L}{3}M_1m$	$\frac{L}{12}M_1(3m_1+m_2)$	$\frac{L}{12}M_1(3m_1-m_2)$	$\frac{L}{4}M_1m_1$	$\frac{L}{12}M_1m_2$	$\frac{L}{12}M_1m(1+\beta+\beta^2)$
M2, L	$\frac{L}{3}M_2m$	$\frac{L}{12}M_2(m_1+3m_2)$	$\frac{L}{12}M_2(m_1-3m_2)$	$\frac{L}{12}M_2m_1$	$\frac{L}{4}M_2m_2$	$\frac{L}{12}M_2m(1+\alpha+\alpha^2)$

3.7 LIGNES D'INFLUENCE

Considérons une poutre à plan moyen chargée dans son plan par des forces verticales. On appelle fonction d'influence $f(\alpha)$ l'expression en une section droite Σ donnée d'un effet (noté E) donné, engendré par une cause de valeur unité se déplaçant sur la poutre.

Causes :

- force ponctuelle, ensemble de forces ponctuelles,
- couple ponctuel,
- déplacements imposés.

Effets :

- déformation (déplacement),
- actions de liaison,
- efforts internes (N, V, M, M_x).

La représentation graphique de la fonction d'influence est appelée ligne d'influence de l'effet E dans la section Σ.

Soit une poutre sur deux appuis soumise à une charge ponctuelle (figure 3.2) :

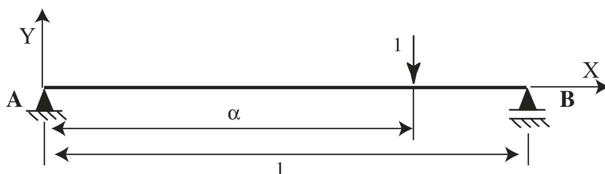


Figure 3.2

Les fonctions d'influence de V et de M en une section Σ en x sont :

$$x < \alpha \begin{cases} V(x,\alpha) = \dfrac{\alpha - l}{l} \\ M(x,\alpha) = x\left(\dfrac{l-\alpha}{l}\right) \end{cases}$$
$$x > \alpha \begin{cases} V(x,\alpha) = \dfrac{\alpha}{l} \\ M(x,\alpha) = \alpha\left(\dfrac{l-x}{l}\right) \end{cases} \tag{3.14}$$

Notons que, dans ces expressions, la variable est α tandis que x est fixée.

Nous obtenons les lignes d'influences suivantes (figure 3.3) :

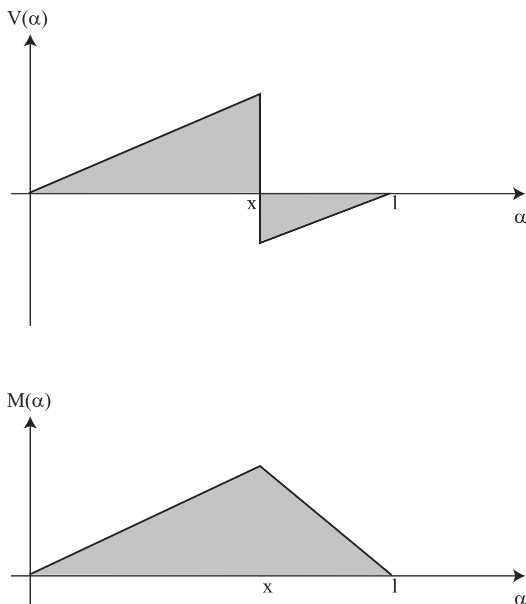


Figure 3.3

3.7.1 Effet d'un ensemble de charges

L'effet E d'un système de charges concentrées P_1, $P_2 \ldots P_n$ d'abscisses α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ est égal, en vertu du principe de superposition, à :

$$\mathrm{E} = P_1 f(\alpha_1) + P_2 f(\alpha_2) + \ldots + P_n f(\alpha_n) \tag{3.15}$$

L'effet d'une charge répartie $p(\alpha)$ entre deux points A et B est égal à :

$$\mathrm{E} = \int_A^B p(\alpha) f(\alpha) d\alpha \tag{3.16}$$

3.7.2 Lignes d'influence des déformations

Le théorème de Maxwell-Betti montre que :

– la ligne d'influence du déplacement vertical d'une section Σ d'abscisse x sous l'action d'une charge verticale unité d'abscisse α est la ligne représentative d'un déplacement vertical de la section Σ' d'abscisse α sous l'action d'une force verticale unité placée dans la section d'abscisse x ;

– la ligne d'influence de la rotation d'une section Σ d'abscisse x sous l'action d'une charge verticale unité d'abscisse α est la ligne représentative d'un déplacement vertical de la section Σ' d'abscisse α sous l'action d'un couple unité placé dans la section d'abscisse x.

Chapitre 4

Systèmes isostatiques

L'objectif de ce chapitre est de donner les solutions de base en terme de réactions d'appuis, diagramme de contraintes généralisées et déplacement, pour des systèmes de poutres isostatiques.

4.1 DÉFINITIONS

4.1.1 Systèmes isostatiques

Un système est dit isostatique si toutes les réactions d'appuis ainsi que les contraintes généralisées en tout point de la structure peuvent être déterminées par la seule utilisation des équations d'équilibre. Les caractéristiques géométriques de la structure (inertie, section, matériau) n'entrent à aucun moment dans le calcul de la distribution des efforts. Ces dernières ne seront introduites que dans les chapitres suivants dans l'étude des systèmes hyperstatiques.

4.1.2 Efforts et conditions de liaisons

Les structures étudiées ci-après peuvent être soumises à des efforts et couples ponctuels ($\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{C}$) ainsi qu'à des densités d'efforts ($\overrightarrow{p}$), appelées aussi charges linéiques.

Nous ne considérerons dans ce chapitre, dans un souci de simplicité d'écriture, que des structures planes dans le plan ($\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$). Les rotations et moments fléchissants sont donc définis autour de l'axe $\overrightarrow{z}$. La structure est en équilibre sous l'action de ces efforts et de conditions de liaisons. Les principales liaisons entre la structure et son environnement sont résumées dans le tableau ci-dessous. Nous donnons les réactions d'appuis produites ainsi que les degrés de liberté en déplacement bloqués ou autorisés. Les efforts verticaux sont notés V, les horizontaux H et les moments fléchissants M. Les déplacements axiaux sont notés u, transversaux v et les rotations θ.

Type de liaisons	Schémas	Réactions d'appuis	Degrés de liberté
Rotule		$H \neq 0$, $V \neq 0$, $M = 0$	$u = 0$, $v = 0$, $\theta \neq 0$
Appui simple		$V \neq 0$, $H = 0$, $M = 0$	$v = 0$, $u \neq 0$, $\theta \neq 0$
Encastrement		$V \neq 0$, $H \neq 0$, $M \neq 0$	$v = 0$, $u = 0$, $\theta = 0$

4.1.3 Exemple

Un exemple simple est traité ici, permettant dans un cadre isostatique de comprendre les principales étapes de détermination des efforts et déplacements dans la structure. Soit une poutre isostique de longueur l, de moment quadratique I et de module d'Young E supportant une charge concentrée au tiers de sa longueur comme indiqué sur la figure ci dessous.

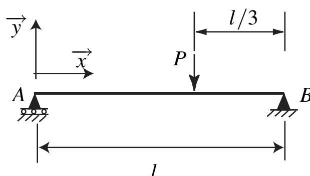


Figure 4.1

➤ Détermination des réactions d'appuis

Nous noterons H les réactions d'appuis verticales en un point donné, V les verticales et M les moments fléchissants. Les équations d'équilibre en effort $\left(\sum F_{/x} \text{ et } \sum F_{/y}\right)$ nous indiquent que :

$$H_A = H_B = 0$$

$$V_A + V_B - P = 0$$

L'équation d'équilibre en moment, écrite au point A nous permet de déterminer les réactions verticales en A et B.

$$V_B = \frac{2P}{3}$$
$$V_A = \frac{P}{3}$$

➤ Détermination des contraintes généralisées

Dans la détermination le long de la poutre des contraintes généralisées (effort normal, effort tranchant et moment fléchissant), nous appliquerons la méthode des coupures. Par application du principe fondamental de la statique, cette méthode permet de calculer le torseur des efforts intérieurs en tout point d'une section droite. Pour une section comprise entre le point A et le point d'application de l'effort extérieur P :

l'équilibre en effort de la section d'abscisse x, selon $\vec{x}$ nous indique que :

$$N(x) = 0$$

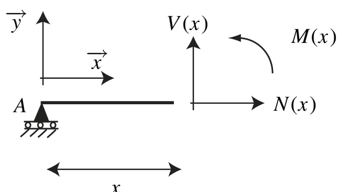


Figure 4.2

l'équilibre en effort selon $\vec{y}$ nous permet de déterminer l'effort tranchant :

$$V(x) = -V_A = -\frac{P}{3}$$

l'équilibre en moment autour de $\vec{z}$ nous permet de déterminer le moment fléchissant :

$$M(x) = V_A x = \frac{Px}{3}$$

De même pour les sections de poutre situées entre le point d'application de P et B.

$$N(x) = 0$$

$$V(x) = -V_A + P = \frac{2P}{3}$$

$$M(x) = V_A x - P\left(x - \frac{2l}{3}\right) = \frac{2Pl}{3} - \frac{2Px}{3}$$

Les diagrammes des efforts tranchants et moments fléchissants ainsi calculés sont tracés sur la figure ci-après :

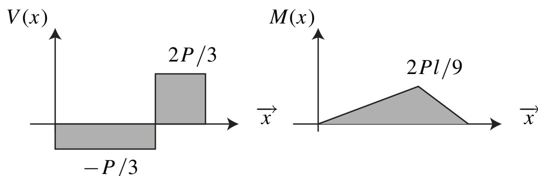


Figure 4.3

➤ Calcul des déplacements

La flèche de la poutre est calculée en utilsant la loi de comportement reliant la courbure (dérivée seconde de la flèche : $v''(x)$) au moment fléchissant : $M(x) = EIv''(x)$. Ainsi pour la partie de la poutre entre le point A et le point d'application de P,

$$v(x) = -\frac{px}{18EI}\left[\frac{8l^2}{9} - x^2\right]$$

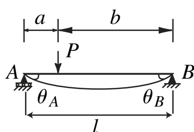
Pour la partie restante de la poutre :

$$v(x) = -\frac{p(l-x)}{18EI}\left[x(2l-x) - \frac{4l^2}{9}\right]$$

4.2 POUTRE SUR DEUX APPUIS

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de passer en revue les différents cas de charges possibles rencontrés pour une poutre simplement appuyée sur ses appuis.

4.2.1 Cas d'une charge concentrée



$$V_A = \frac{Pb}{l} \qquad \theta_A = -\frac{Pa}{6EIl}(l-a)(2l-a)$$

$$V_B = \frac{Pa}{l} \qquad \theta_B = \frac{Pa}{6EIl}\left(l^2 - a^2\right)$$

Figure 4.4

➤ Calcul des contraintes généralisées

Pour $0 < x < a$,

$$V(x) = -\frac{Pb}{l}$$

$$M(x) = \frac{Pbx}{l}$$

Pour $a < x < l$,

$$V(x) = \frac{Pa}{l}$$

$$M(x) = Pa\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Le moment maximum est en a et vaut $M_{Max} = \frac{Pab}{l}$.

➤ Calcul de la déformée

Pour $0 < x < a$,

$$v(x) = -\frac{Pbx}{6EIl}\left[l^2 - b^2 - x^2\right]$$

Pour $a < x < l$,

$$v(x) = -\frac{Pa(l-x)}{6EIl}\left[x(2l-x) - a^2\right]$$

Le déplacement au centre de la poutre en $x = l/2$ vaut :

$$v(l/2) = -\frac{Pa\left(3l^2 - 4a\right)}{48EI}$$

4.2.2 Cas d'un convoi de charges ponctuelles : théorème de Barré

Un convoi est un système de charges ponctuelles susceptibles de se déplacer dans son ensemble le long de la poutre. Si la détermination des efforts tranchants maximaux aux appuis de la poutre ne pose pas de problème, la localisation du moment fléchissant maximum, fonction de la position du convoi sur la poutre doit être menée avec précision. Le théorème de Barré permet de déterminer la position du convoi fournissant le moment fléchissant maximal : le moment fléchissant est maximum au droit d'une charge lorsque cette charge et la résultante R des charges du convoi se trouvent dans des sections symétriques par rapport au milieu de la poutre.

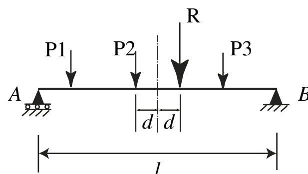


Figure 4.5

Prenons l'exemple de deux charges sur une poutre, distante d'une longueur a entre elles, le moment maximal est égal à :

$$M_{Max} = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2$$

4.2.3 Cas d'une charge uniformément répartie

L'effort p exprimé en N/m est uniformément réparti sur toute la longueur de la poutre.

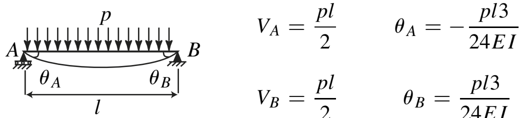


Figure 4.6

➤ Calcul des contraintes généralisées

$$V(x) = -p\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$M(x) = \frac{px(l - x)}{2}$$

Le moment maximum est en $l/2$ et vaut $M_{Max} = \frac{pl^2}{8}$.

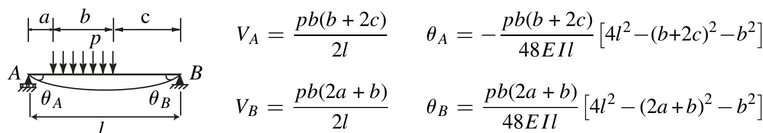
➤ Calcul de la déformée

$$v(x) = -\frac{px}{24EI}\left[l^3 - 2lx^2 + x^3\right]$$

Le déplacement est maximal au centre de la poutre en $x = l/2$ et vaut :

$$v(l/2) = -\frac{5pl^4}{384EI}$$

4.2.4 Cas d'une charge répartie partielle



$$V_A = \frac{pb(b+2c)}{2l} \qquad \theta_A = -\frac{pb(b+2c)}{48EIl}\left[4l^2-(b+2c)^2-b^2\right]$$

$$V_B = \frac{pb(2a+b)}{2l} \qquad \theta_B = \frac{pb(2a+b)}{48EIl}\left[4l^2-(2a+b)^2-b^2\right]$$

Figure 4.7

➤ Calcul des contraintes généralisées

Pour $0 < x < a$,

$$V(x) = -\frac{pb}{2l}(b+2c) \qquad M(x) = \frac{pb}{2l}(b+2c)x$$

Pour $a < x < b + a$,

$$V(x) = -\frac{pb}{2l}(b+2c) + p(x-a)$$

$$M(x) = \frac{pb}{2l}(b+2c)x - p\frac{(x-a)^2}{2}$$

Pour $b + a < x < l$,

$$V(x) = \frac{pb}{2l}(2a+b)$$

$$M(x) = \frac{pb}{2l}(2a+b)(l-x)$$

Le moment maximum est obtenu pour $x = a + \dfrac{b(b+2c)}{2l}$ et vaut :

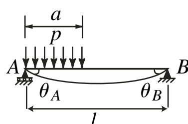
$$M_{Max} = \frac{pb}{8l^2}(b+2c)\left[b(b+2c)+4al\right]$$

➤ Calcul de la déformée

La flèche maximale est obtenue entre a et $a+b$ et s'exprime par :

$$v(x) = -\frac{p}{48EIl}\left[b(b+2c)x\left[4(l^2-x^2)-(b+2c)^2-b^2\right]+2l(x-a)^4\right]$$

4.2.5 Cas d'une charge répartie partielle proche d'un appui



$$V_A = \frac{pa}{l}\left(l-\frac{a}{2}\right) \qquad \theta_A = -\frac{pa^2(2l-a)^2}{24EIl}$$

$$V_B = \frac{pa^2}{2l} \qquad \theta_B = \frac{pa^2(2l^2-a^2)}{24EIl}$$

Figure 4.8

➤ Calcul des contraintes généralisées

Pour $0 < x < a$,

$$V(x) = -\frac{p}{2l}\left[a(2l-a)-2lx\right]$$

$$M(x) = \frac{px}{2l}\left[a(2l-a)-lx\right]$$

Pour $a < x < l$,

$$V(x) = \frac{pa^2}{2l}$$

$$M(x) = \frac{pa^2(l-x)}{2l}$$

Le moment maximum est obtenu pour $x = \dfrac{a}{2l}(2l-a)$ et vaut :

$$M_{Max} = \frac{pa^2(2l-a)^2}{8l^2}$$

➤ Calcul de la déformée

Pour $0 < x < a$,

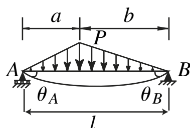
$$v(x) = -\frac{px}{24EIl}\left[a^2(2l-a)^2 - 2a(2l-a)x^2 + lx^3\right]$$

Pour $a < x < l$,

$$v(x) = -\frac{pa^2(l-x)}{24EIl}\left[4lx - 2x^2 - a^2\right]$$

4.2.6 Cas d'une charge triangulaire

Nous supposons que $a < b$ et que P est la valeur de l'effort le plus important au sommet du triangle.



$$V_A = \frac{P}{6}(l+b) \qquad \theta_A = -\frac{P}{360EI}(l+b)\left(7l^2 - 3b^2\right)$$

$$V_B = \frac{P}{6}(l+a) \qquad \theta_B = \frac{P}{360EI}(l+a)\left(7l^2 - 3a^2\right)$$

Figure 4.9

➤ Calcul des contraintes généralisées

Pour $0 < x < a$,

$$V(x) = -\frac{P}{6a}\left[a(l+b) - 3x^2\right]$$

$$M(x) = \frac{Px}{6a}\left[a(l+b) - 3x^2\right]$$

Pour $a < x < l$,

$$V(x) = -\frac{P}{6b}\left(3x^2 - 6lx + 2l^2 + a^2\right)$$

$$M(x) = \frac{P}{6b}(l-x)\left(2lx - x^2 - a^2\right)$$

Le moment maximum est obtenu pour $x = l - \sqrt{\dfrac{b(l+a)}{3}}$ et vaut :

$$M_{Max} = \frac{P}{9}(l+a)\sqrt{\frac{b(l+a)}{3}}$$

➤ **Calcul de la déformée**

Pour $0 < x < a$,

$$v(x) = -\frac{px}{360EIa}\left[3x^4 + a(l+b)(7l^2 - 3b^2 - 10x^2)\right]$$

Pour $a < x < l$,

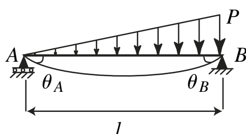
$$v(x) = -\frac{p(l-x)}{360EIb}\left[3(l-x)^4 + b(l+a)(7l^2 - 3a^2 - 10(l-x)^2\right]$$

Si la charge triangulaire est symétrique, le moment maximum est obtenu en $x = l/2$ et vaut $M_{Max} = \dfrac{Pl}{6}$.

La flèche maximum est égale à $v(l/2) = -\dfrac{Pl^3}{60EI}$, et les rotations aux appuis, $\theta_A = -\theta_B = -\dfrac{5Pl^2}{96EI}$.

4.2.7 Cas d'une charge triangulaire monotone

P est la valeur de l'effort le plus important au sommet du triangle.



$$V_A = \frac{Pl}{6} \qquad \theta_A = -\frac{7Pl^3}{360EI}$$

$$V_B = \frac{Pl}{3} \qquad \theta_B = \frac{8Pl^3}{360EI}$$

Figure 4.10

➤ Calcul des contraintes généralisées

$$V(x) = -\frac{P}{6l}\left(l^2 - 3x^2\right)$$
$$M(x) = \frac{Px}{6l}\left(l^2 - x^2\right)$$

Le moment maximum est obtenu pour $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ et vaut $M_{Max} = \frac{2Pl^2}{18\sqrt{3}}$. Au milieu de la poutre, en $x = l/2$, le moment est égal à $M(l/2) = Pl^2/16$.

➤ Calcul de la déformée

$$v(x) = -\frac{Px}{360EIl}\left(l^2 - x^2\right)\left(7l^2 - 3x^2\right)$$

Le déplacement maximal est obtenu en $x = 0.519l$ et vaut :

$$v_{Max} = -\frac{7Pl^3}{76.6EI}$$

4.2.8 Cas d'une charge triangulaire anti symétrique

P est la valeur de l'effort le plus important au sommet du triangle.

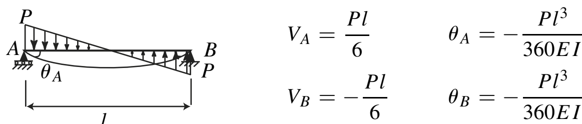


Figure 4.11

➤ Calcul des contraintes généralisées

$$V(x) = -\frac{P}{6l}\left(6x^2 - 6lx + l^2\right)$$
$$M(x) = \frac{Px}{6l}(l - x)(l - 2x)$$

Le moment maximum est obtenu pour $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{6} l$ et vaut :

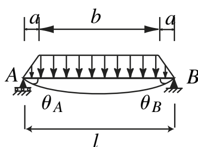
$$M_{Max} = \pm \frac{Pl^2\sqrt{3}}{108}.$$

➤ Calcul de la déformée

$$v(x) = \frac{Px}{360EIl}\left(6x^4 - 15lx^3 + 10l^2x^2 - l^4\right)$$

4.2.9 Cas d'une charge trapézoïdale symétrique

P est la valeur de l'effort le plus important du trapèze.



$$V_A = \frac{P(l-a)}{2} \qquad \theta_A = -\frac{P}{24EI}\left(l^3 - 2la^2 + a^3\right)$$
$$V_B = \frac{P(l-a)}{2} \qquad \theta_B = \frac{P}{24EI}\left(l^3 - 2la^2 + a^3\right)$$

Figure 4.12

➤ Calcul des contraintes généralisées

Pour $0 < x < a$,

$$V(x) = -\frac{P}{2a}\left(al - a^2 - x^2\right)$$
$$M(x) = \frac{Px}{6a}\left(3al - 3a^2 - x^2\right)$$

Pour $a < x < l - a$,

$$V(x) = -\frac{P}{2}(l - 2x)$$
$$M(x) = \frac{P}{6}\left(3lx - 3x^2 - a^2\right)$$

Pour $l - a < x < l$,

$$V(x) = -\frac{P}{2a}\left[(l - x)^2 - a(l - a)\right]$$
$$M(x) = \frac{P}{6a}(l - x)\left[3a(l - a) - (l - x)^2\right]$$

Le moment maximum est obtenu en milieu de poutre pour $x = l/2$ et vaut $M_{Max} = \frac{P}{24}\left(3l^2 - 4a^2\right)$.

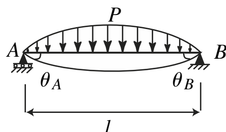
➤ Calcul de la déformée

La flèche maximale est obtenue en milieu de poutre et vaut :

$$v(l/2) = -\frac{P}{1920EI}\left(5l^2 - 4a^2\right)^2$$

4.2.10 Cas d'une charge parabolique

P est la valeur de l'effort au sommet de la parabole.



$$V_A = \frac{Pl}{3} \qquad \theta_A = -\frac{Pl^3}{30EI}$$

$$V_B = \frac{Pl}{3} \qquad \theta_B = \frac{Pl^3}{30EI}$$

Figure 4.13

➤ Calcul des contraintes généralisées

$$V(x) = -\frac{P}{3l^2}\left(4x^3 - 6lx^2 + l^3\right)$$
$$M(x) = \frac{P}{3l^2}x\left(x^3 - 2lx^2 + l^3\right)$$

Le moment maximum est obtenu en milieu de poutre pour $x = l/2$ et vaut $M_{Max} = \frac{5Pl^2}{48}$.

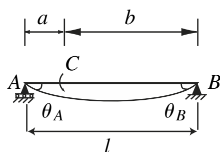
➤ Calcul de la déformée

$$v(x) = \frac{Px}{90EIl^2}\left(x^5 - 3lx^4 + 5l^3x^2 - 3l^5\right)$$

La flêche maximale est obtenue en milieu de poutre et vaut :

$$v(l/2) = -\frac{6.1Pl^4}{576EI}$$

4.2.11 Cas d'un couple en un point quelconque



$$V_A = \frac{C}{l} \qquad \theta_A = -\frac{C}{6EIl}\left(l^2 - 3b^2\right)$$
$$V_B = -\frac{C}{l} \qquad \theta_B = -\frac{C}{6EIl}\left(l^2 - 3a^2\right)$$

Figure 4.14

➤ Calcul des contraintes généralisées

Pour $0 < x < a$,

$$V(x) = -\frac{C}{l}$$
$$M(x) = \frac{Cx}{l}$$

Pour $a < x < l$,

$$V(x) = -\frac{C}{l}$$

$$M(x) = -\frac{C(l-x)}{l}$$

➤ Calcul de la déformée

Pour $0 < x < a$,

$$v(x) = \frac{Cx}{6EIl}\left(x^2 - l^2 + 3b^2\right)$$

Pour $a < x < l$,

$$v(x) = \frac{C}{6EIl}\left[x^3 - 3lx^2 + \left(2l^2 + 3a^2\right)x - 3a^2 l\right]$$

Le déplacement au point d'application du couple en $x = a$ vaut :

$$v(a) = -\frac{1}{EI}\frac{Cab(b-a)}{3l}$$

4.2.12 Cas d'un couple à une extrémité

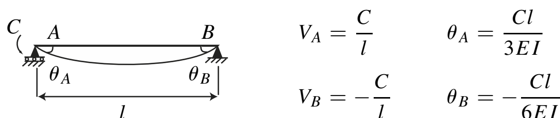


Figure 4.15

➤ Calcul des contraintes généralisées

$$V(x) = -\frac{C}{l}$$

$$M(x) = -\frac{C(l-x)}{l}$$

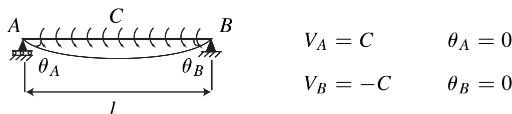
➤ Calcul de la déformée

$$v(x) = \frac{Cx}{6EIl}(l - x)(2l - x)$$

Le déplacement au milieu de la poutre en $x = l/2$ vaut : $v(l/2) = \dfrac{Cl^2}{16EI}$.

4.2.13 Cas d'un couple uniformément réparti

C est le couple appliqué sur la poutre par unité de longueur.



$$V_A = C \qquad \theta_A = 0$$
$$V_B = -C \qquad \theta_B = 0$$

Figure 4.16

➤ Calcul des contraintes généralisées

$$V(x) = -C$$
$$M(x) = 0$$

➤ Calcul de la déformée

$$v(x) = 0$$

4.3 POUTRE CONSOLE

4.3.1 Cas d'une charge concentrée

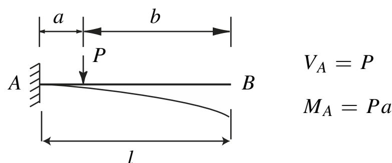


Figure 4.17

➤ Calcul des contraintes généralisées

Pour $0 < x < a$,

$$V(x) = -P$$
$$M(x) = P(x - a)$$

Pour $a < x < l$,

$$V(x) = 0$$
$$M(x) = 0$$

➤ Calcul de la déformée

Pour $0 < x < a$,

$$v(x) = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x)$$

Pour $a < x < l$,

$$v(x) = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a)$$

Le déplacement en B vaut $v(l) = -\dfrac{pa^2}{6EI}(3l - a)$ et sous le point d'application de la charge $v(P) = -\dfrac{pa^3}{3EI}$.

4.3.2 Cas d'une charge uniformément répartie

p est une charge linéique.

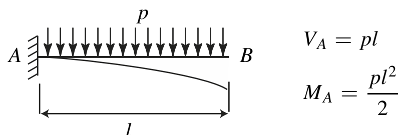


Figure 4.18

➤ Calcul des contraintes généralisées

$$V(x) = p(x - l)$$
$$M(x) = -\frac{p}{2}(x - l)^2$$

➤ Calcul de la déformée

$$v(x) = -\frac{p}{24EI}\left[(l - x)^4 + 4l^3x - l^4\right]$$

Le déplacement en bout de poutre en B vaut $v(l) = -\dfrac{pl^4}{8EI}$.

4.3.3 Cas d'une charge triangulaire croissante

P est la valeur maximum de l'effort.

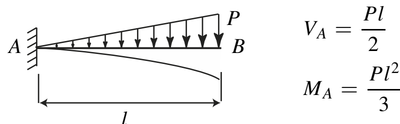


Figure 4.19

➤ Calcul des contraintes généralisées

$$V(x) = \frac{Pl}{2}\left(\frac{x^2}{l^2} - 1\right)$$
$$M(x) = -\frac{P(l-x)^2(2l+x)}{6l}$$

➤ Calcul de la déformée

$$v(x) = -\frac{Px^2}{120EIl}\left(20l^3 - 10l^2x + x^3\right)$$

Le déplacement en bout de poutre en B vaut $v(l) = -\dfrac{11Pl^4}{120EI}$.

4.3.4 Cas d'une charge triangulaire décroissante

P est la valeur maximum de l'effort.

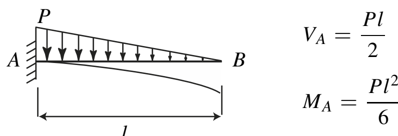


Figure 4.20

➤ Calcul des contraintes généralisées

$$V(x) = -\frac{P}{2l}(l-x)^2$$
$$M(x) = -\frac{P}{6l}(l-x)^3$$

➤ Calcul de la déformée

$$v(x) = -\frac{P}{120EIl}\left[4l^5 - 5l^4(l-x) + (l-x)^5\right]$$

Le déplacement en B vaut $v(l) = -\frac{Pl^4}{30EI}$.

4.3.5 Cas d'un couple

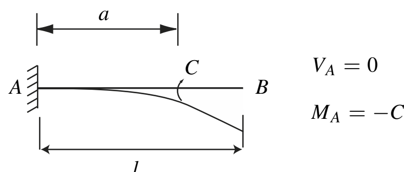


Figure 4.21

➤ Calcul des contraintes généralisées

pour $x < a$

$$V(x) = 0$$

$$M(x) = C$$

pour $a < x < l$

$$V(x) = 0$$

$$M(x) = 0$$

➤ Calcul de la déformée

pour $x < a$

$$v(x) = -\frac{Cx^2}{2EI}$$

pour $a < x < l$

$$v(x) = -\frac{Ca}{EI}\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

Le déplacement au point d'application du couple vaut $v(a) = -\frac{Ca^2}{2EI}$ et en bout de poutre en B : $v(l) = -\frac{Ca}{EI}\left(l - \frac{a}{2}\right)$.

4.4 ARC PARABOLIQUE ISOSTATIQUE

Nous définissons un arc par sa fibre moyenne, à savoir : $y = \frac{4f}{l}x(l - x)$. L'angle d'inclinaison de la fibre moyenne est défini par : $\theta = \frac{4f}{l}(l - 2x)$.

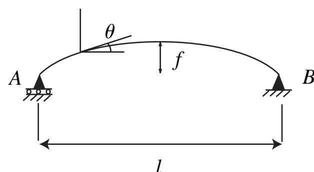


Figure 4.22

4.4.1 Cas d'une charge uniformément répartie

p est une charge linéique.

$$N(x) = p\left(x - \frac{l}{2}\right)\sin\theta$$

$$V(x) = p\left(x - \frac{l}{2}\right)\cos\theta$$

$$M(x) = \frac{px(l - x)}{2}$$

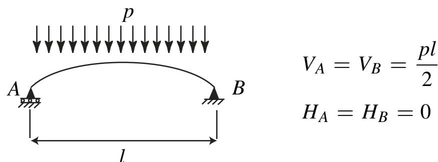


Figure 4.23

Le déplacement au centre de la poutre est égal à $v(l/2) = -\dfrac{pfl^3}{15EI}$.

4.4.2 Cas d'une charge ponctuelle horizontale

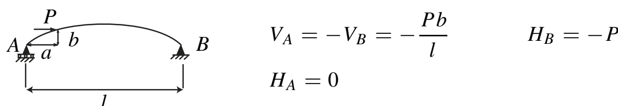


Figure 4.24

➤ Calcul des contraintes généralisées

pour $x < a$

$$N(x) = \frac{Pb}{l}\sin\theta$$

$$V(x) = \frac{Pb}{l}\cos\theta$$

$$M(x) = -\frac{Pbx}{l}$$

pour $a < x < l$

$$N(x) = \frac{Pb}{l}\sin\theta$$

$$V(x) = \frac{Pb}{l}\cos\theta$$

$$M(x) = -\frac{Pbx}{l} - P(y - b)$$

Le déplacement au centre de la poutre est égal à :

$$v(l/2) = P(l-a)\left[\frac{4f^2}{15EI}\left(2 - \frac{3a}{l} + \frac{2a^2}{l^2} + \frac{12a^3}{l^3} - \frac{8a^4}{l^4}\right) + \frac{1}{ES}\right]$$

4.4.3 Cas d'une charge ponctuelle verticale

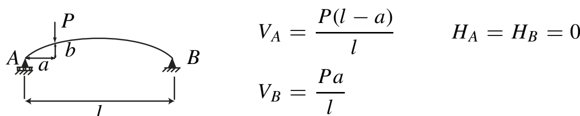


Figure 4.25

➤ Calcul des contraintes généralisées

pour $x < a$

$$N(x) = -\frac{P(l-a)}{l}\sin\theta$$

$$V(x) = -\frac{P(l-a)}{l}\cos\theta$$

$$M(x) = \frac{Px(l-a)}{l}$$

pour $a < x < l$

$$N(x) = \frac{Pa}{l}\sin\theta$$

$$V(x) = -\frac{Pa}{l}\cos\theta$$

$$M(x) = \frac{Pa}{l}(l-x)$$

Le déplacement au centre de la poutre (si $a < l/2$) est égal à :

$$v(l/2) = -\frac{Pf^2a}{12EIl^4}\left(l^4 - l^3x - 8l^2x^2 + 20lx^3 - 12.8x^4\right).$$

Chapitre 5

Systèmes hyperstatiques

5.1 GÉNÉRALITÉS

5.1.1 Degré d'hyperstaticité H

a) Treillis plans isostatiques et hyperstatiques

Un treillis est isostatique s'il est possible de calculer toutes les actions de liaison (et les efforts dans toutes les barres) étant donnée une sollicitation extérieure quelconque. Pour cela, il faut faire le bilan des équations indépendantes et des inconnues indépendantes.

Le treillis est décomposé en barres et en nœuds auxquels chaque barre est liée (figure 5.1).

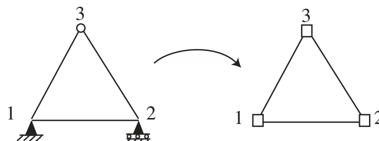


Figure 5.1 Décomposition du treillis en nœuds et barres

Puis on fait le bilan des équations :

– on isole chaque barre : 3 équations × nb de barre (b).
– chaque nœud impose une restriction selon le type de liaison : $\Sigma\, p \underbrace{i}_{\text{nœud}}$.
  $p = 2$ pour une articulation liant 2 barres
  $p = 3$ pour un encastrement liant 2 barres
  $p = 1$ pour un appui simple.
– nombre d'inconnues : actions de liaison à l'extrémité de chaque barre, action de liaison avec l'extérieur. $\Sigma\, l \overbrace{\underbrace{\substack{i\\j}}_{\text{barre}}}^{\text{nœud}}$

Dans notre cas le nombre d'équations est :

$$\left.\begin{array}{l} b = 3 \times 3 \\ \Sigma p_i = 2 + 2 + 2 = 6 \end{array}\right\} \text{15 équations}$$

le nombre d'inconnues est :

$$\left.\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} \text{barre } 1-2 :\ 4 \\ \text{barre } 2-3 :\ 4 \\ \text{barre } 1-3 :\ 4 \end{array}\right\} & \begin{array}{l}\text{chaque barre est liée} \\ \text{par 2 articulations}\end{array} \\ \text{nœud 1, ext} :\ 1 & \text{(appui simple)} \\ \text{nœud 2, ext} :\ 2 & \text{(articulation)} \end{array}\right\} \text{15 inconnues}$$

Le treillis est donc isostatique.

Cette formule est valable pour les treillis et aussi dans d'autres situations (cas des ossatures composées de poutres). Dans le cas des treillis elle se

simplifie car toutes les liaisons entre barres sont des articulations :

$$\Sigma N_i = 2 \times \overbrace{n}^{\text{nb de nœuds}}$$

$$\Sigma l_i = \underbrace{4 \times b}_{\substack{\text{chaque barre}\\ \text{à 2 articulations}}} + \underbrace{m}_{\substack{\text{inconnues de liaisons}\\ \text{avec l'extérieur}}}$$

Pour un treillis isostatique :

$$3b + 2n = 4b + m \rightarrow \boxed{b = 2n - m}$$

b) Cas général

Un système comprenant k solides possède dans l'espace $6k$ degrés de liberté (dans le plan, $3k$). Ces solides sont cependant liés entre eux à différents points de jonction et fixés en un certain nombre de points d'appuis.

Soit r le nombre de réactions d'appuis, c'est-à-dire de composantes de réactions inconnues aux différents points d'appui. Soit p le nombre de liaisons internes indépendantes entre solides. On appelle degré d'hyperstaticité la quantité :

$$H = p + r - 6k \quad \text{dans l'espace}$$
$$H = p + r - 3k \quad \text{dans le plan}$$

Pour déterminer le nombre de liaisons internes (p), on peut utiliser les formules suivantes :

- articulations ou rotule : si k solides concourent en une articulation $p = 3(k - 1)$ dans l'espace et $p = 2(k - 1)$ dans le plan.
- encastrements : si k solides concourent en un encastrement $p = 6(k - 1)$ dans l'espace et $p = 3(k - 1)$ dans le plan.
- liaisons mixtes : dénombrement à la main du nombre de conditions de liaisons.

5.1.2 Méthode des forces[1]

a) Choix d'une structure isostatique associée

Une structure est isostatique si les seules équations d'équilibre permettent de déterminer de façon unique les efforts intérieurs. Lorsque la structure présente des liaisons internes ou des appuis supplémentaires, la solution des équations d'équilibre est un espace affine, l'espace des efforts statiquement admissible $\mathcal{SA}$. La dimension de cet espace est le degré d'hyperstaticité de la structure, c'est-à-dire le nombre de liaisons "en trop". Un élément de cet espace s'écrira :

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i M_i \qquad (5.1)$$

où M_0 est une solution particulière des équations d'équilibre et $\{M_i,\ i = 1, \dots n\}$ est une base de l'espace vectoriel des efforts intérieurs auto-équilibrés (on ne considère que les efforts de flexion pour simplifier la présentation).

Comme en mécanique des milieux continus, la résolution du problème nécessite dans ce cas l'introduction d'équations supplémentaires : le comportement. En élasticité on montre, comme dans le cas continu, que la solution du système minimise l'énergie complémentaire sur l'espace (principe des travaux virtuels). La méthode des forces consiste donc à :

- paramétrer l'espace $\mathcal{SA}$: on utilise pour cela la méthode des coupures,
- écrire la minimisation de l'énergie complémentaire : on aboutit à un système linéaire faisant apparaître la matrice de souplesse.
- résoudre le système et reconstruire la solution à partir du paramétrage de $\mathcal{SA}$.

Exemple. Soit une poutre (AB) de longueur $2l$ encastrée à gauche, simplement appuyée à droite, soumise en son centre à une charge verticale F dirigée vers le bas. On utilisera la réaction verticale $V_B = X$ comme paramètre.

1. avec l'aimable contribution de notre collègue Bruno Sudret (EDF)

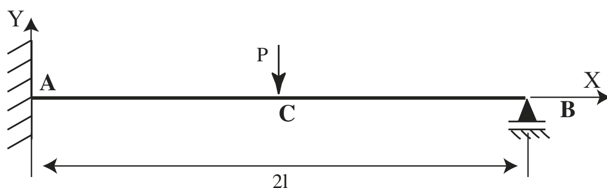


Figure 5.2 Poutre droite hyperstatique de degré 1

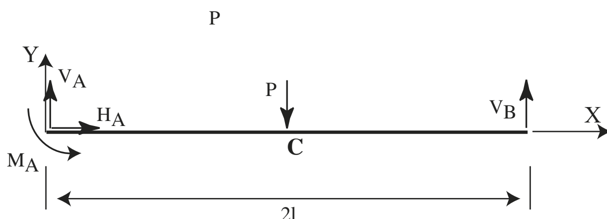


Figure 5.3 Paramétrage de la poutre droite hyperstatique de degré 1

L'équilibre s'écrit, avec les notations de la figure précédente :

$$\begin{aligned} H_A &= 0 \\ V_A + V_B - F &= 0 \\ M_A + Fl - 2V_B l &= 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

On peut donc paramétrer le système de réactions statiquement admissibles par :

$$H_A = 0 \quad V_A = F - X \quad V_B = X \quad M_A = (2X - F)l \tag{5.3}$$

Les efforts intérieurs statiquement admissibles sont alors :

$$\begin{aligned} &N = 0 \\ &V = X - F \text{ sur } [0, l] \quad V = X \text{ sur } [l, 2l] \\ &M = F(x - l) + X(2l - x) \text{ sur } [0, l] \quad M = X(2l - x) \text{ sur } [l, 2l] \end{aligned} \tag{5.4}$$

b) Méthode des coupures

➤ Choix d'une structure isostatique associée

Soit ($\mathcal{S}$) une structure n fois hyperstatique soumise à un chargement extérieur (forces ponctuelles, densités linéiques, etc.). On lui associe une structure isostatique ($\mathcal{SI}$) en effectuant n coupures. Une coupure est obtenue :

– soit en libérant une liaison d'appui. Sur la poutre précédente (h=1), on peut par exemple supprimer l'appui à l'extrémité de droite ou encore introduire une rotule sur l'extrémité de gauche.
– soit en annulant une composante d'effort intérieur dans une section donnée : toujours sur le même exemple, on peut introduire une rotule pour annuler M sur n'importe quelle section $x \in]0, 2l[$.

On voit qu'il n'y a pas unicité de la structure isostatique associée.

➤ Caractérisation de $\mathcal{SA}$

Pour obtenir une solution particulière M_0 des équations d'équilibre sur ($\mathcal{S}$), il suffit de déterminer les efforts intérieurs sur ($\mathcal{SI}$) dus au chargement extérieur .

Pour obtenir une base de l'espace des efforts auto-équilibrés, il suffit de déterminer les efforts intérieurs M_i sur ($\mathcal{SI}$) dus à l'application de forces unitaires 1_i auto-équilibrées aux lèvres de la coupure. Les différents cas de charge à considérer en fonction de la coupure choisie sur la poutre $h = 1$ sont donnés figure 5.4.

c) Méthode des forces

➤ Détermination des inconnues hyperstatiques - Théorème de Menabrea

L'énergie complémentaire associée à un élement de $\mathcal{SA}$ s'écrit :

$$\mathcal{E}^*(x_1, \ldots x_n) = \int_{(\mathcal{S})} \frac{\left(M_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i M_i\right)^2}{2EI} dx \qquad (5.5)$$

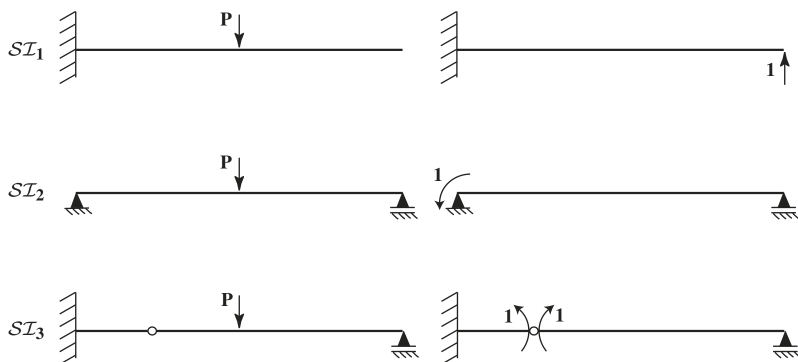


Figure 5.4 Cas de charge à considérer en fonction du choix de ($\mathcal{SI}$)

Soient $(x_1, \ldots x_n)$ les valeurs des paramètres qui caractérisent la solution élastique dans l'espace $\mathcal{SA}$. Par définition, ce sont les valeurs des efforts intérieurs ou des réactions d'appui relâchés par l'opération des coupures. On les appelle inconnues hyperstatiques.

Le principe de minimisation de l'énergie complémentaire exprime que les valeurs $(X_1, \ldots X_n)$ minimisent (5.5). Les conditions de minimisation s'écrivent :

$$\forall i = 1, \ldots n, \qquad \left.\frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial x_i}\right|_{x_i = X_i} = 0 \tag{5.6}$$

ce qui donne :

$$\forall i = 1, \ldots n, \qquad \int_{(\mathcal{S})} \frac{M_0 M_i}{EI} dx + \sum_{j=1}^{n} X_j \int_{(\mathcal{S})} \frac{M_i M_j}{EI} dx = 0 \tag{5.7}$$

Ces équations constituent le théorème de Menabrea. Ce système peut se mettre sous la forme synthétique suivante :

$$[\delta].\underline{X} + \underline{\delta}_0 = 0 \tag{5.8}$$

où les termes de la matrice de souplesse $[\delta]$ et du vecteur $\underline{\delta_0}$ sont donnés par :

$$\delta_{0i} = \int_{(\mathcal{S})} \frac{M_0 M_i}{EI} dx \quad , \quad \delta_{ij} = \int_{(\mathcal{S})} \frac{M_i M_j}{EI} dx \tag{5.9}$$

La matrice de souplesse est symétrique, définie positive et donc inversible. Ce qui signifie que le système (5.8) admet toujours une solution unique.

Les termes de l'équation (5.9) peuvent être interprétés comme les ouvertures des coupures pour les différents systèmes de chargement. Le théorème de Menabrea montre que la somme de ces ouvertures est nulle : les inconnues hyperstatiques sont donc telles qu'appliquées à la structure $(\mathcal{SI})$, elles referment les coupures (et redonnent donc la structure $(\mathcal{S})$ initiale).

➤ Calcul d'un déplacement sur une structure hyperstatique

Le déplacement d'un point P de la structure peut se mettre sous la forme :

$$Q_P = \int_{(\mathcal{S})} \frac{M \bar{M}}{EI} dx \tag{5.10}$$

où M et $\bar{M}$ désignent respectivement les moments fléchissants calculés sur $(\mathcal{S})$, associés au chargement extérieur $\mathcal{F}$ et au chargement unitaire 1_P. La méthode des coupures permet de mettre $\bar{M}$ sous la forme $\bar{M} = \bar{M}_0 + \sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i M_i$. On démontre ainsi le théorème de réduction (ou de Pasternak) : pour calculer un déplacement Q_P au point P, associé à un chargement extérieur $\mathcal{F}$ sur une structure hyperstatique , il suffit d'appliquer le théorème de Müller-Breslau en appliquant l'effort unitaire 1_P à une structure isostatique associée quelconque.

$$Q_P = \int_{(\mathcal{S})} \frac{M \bar{M}_0}{EI} dx \quad \text{avec } \bar{M}_0 \text{ calculé pour une structure } (\mathcal{SI}) \text{ quelconque.} \tag{5.11}$$

Remarque : La démarche a été illustrée en ne tenant compte que de l'énergie de flexion. Un calcul complet nécessite de prendre en

compte également l'énergie de traction-compression (et éventuellement celle associée au cisaillement). On obtient de façon générale des termes de souplesse du type :

$$\delta_{ij} = \int_{(\mathcal{S})} \left(\frac{M_i M_j}{EI} + \frac{N_i N_j}{ES} + \frac{V_i V_j}{GS_R} \right) dx \qquad (5.12)$$

d) Guide pratique d'application

- Calcul du degré d'hyperstaticité de la structure n - Choix de n coupures.
- Calcul de la matrice de souplesse $[\delta]$ et du vecteur $\underline{\delta}_0$.
- Résolution du système linéaire.
- Reconstruction des diagrammes d'efforts intérieurs. On notera qu'on peut très bien n'avoir pris en compte que l'énergie de flexion dans le calcul des inconnues hyperstatiques, alors qu'on déterminera par reconstruction tous les diagrammes, y compris ceux d'effort normal et d'effort tranchant.

Exemple d'application.

On considère la poutre de l'exemple précédent 5.2, soumise à une force verticale F dirigée vers le bas appliquée en son milieu. On utilise la structure $(\mathcal{SI})$ de la figure 5.5.

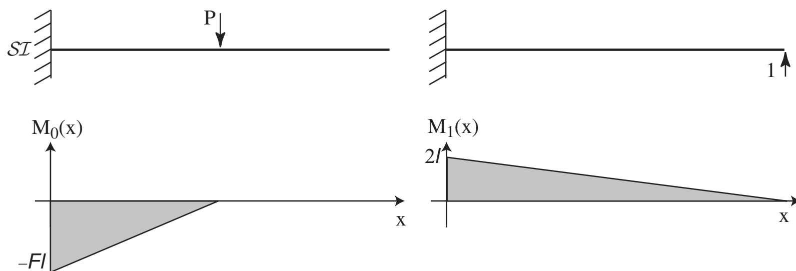


Figure 5.5 Application de la méthode des forces

À l'aide des intégrales de Mohr on obtient :

$$\delta_{11} = \frac{(2l)^3}{3EI}$$
$$\delta_{10} = -\frac{(5Fl)^3}{6EI} \tag{5.13}$$

Ce qui donne pour l'inconnue hyperstatique $X_1 = \dfrac{5}{16}F$. Pour obtenir le diagramme des moments reconstruit, on utilise $M = M_0 + X_1 M_1$ ce qui donne le diagramme suivant :

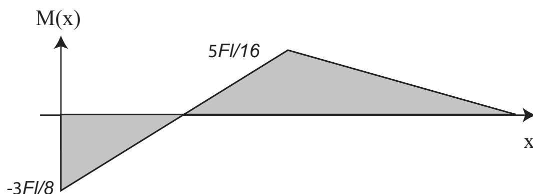


Figure 5.6 Diagramme des moments reconstruit

Pour calculer le déplacement vertical du point C, on applique une force unitaire dirigée vers le haut sur la structure isostatique associée, et on fait le produit des diagrammes (voir figure 5.7).

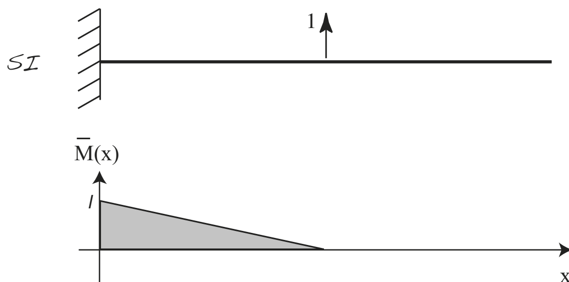


Figure 5.7 Structure isostatique pour le calcul du déplacement

On obtient $\delta_C = -\dfrac{7Fl^3}{96EI}$.

5.1.3 Méthode des déplacements

La méthode des déplacements est une méthode de résolution systématique des systèmes (iso)hyperstatiques. Elle débouche sur les techniques de résolution matricielle et la résolution numérique des problèmes (premier pas vers la méthode des éléments finis). Contrairement à la méthode des forces où les inconnues du problème sont les actions de liaisons hyperstatiques, les inconnues du problème seront les déplacements en certains points de la structure appelés nœuds.

Exemple.

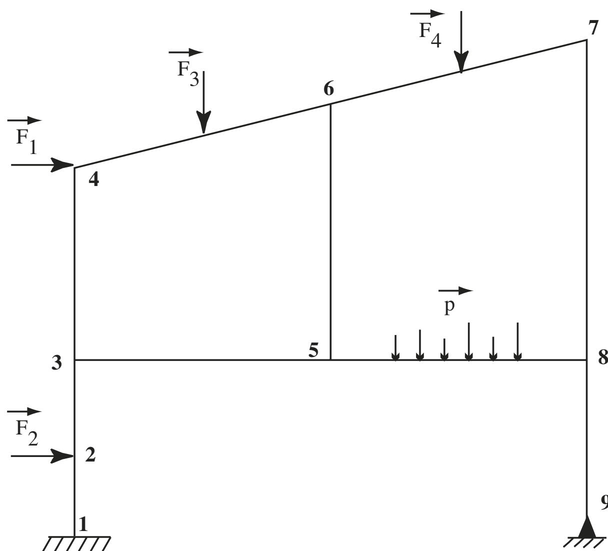


Figure 5.8 Exemple de structure hyperstatique

On souhaite résoudre le problème en calculant les déplacements aux nœuds 1 à 9 sous l'effet du chargement $\{\overrightarrow{F}_i\}$.
Pour cela, les inconnues du problème seront les déplacements aux nœuds 1 à 9, certains de ces déplacements seront connus du fait des liaisons. Ceci sera à prendre en compte lors de la résolution.
Les équations du problème sont les équations de la statique en chaque nœud de la struture.

On utilisera les hypothèses suivantes :

- structure plane chargée dans son plan,
- petites déformations,
- comportement élastique linéaire du matériau,
- liaisons parfaites, poutres droites, section constante.

a) Étude d'une poutre

Prenons par exemple la poutre [5–8] de la figure 5.8 isolée du reste de la structure.

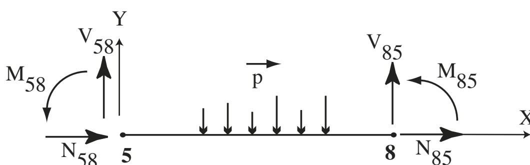


Figure 5.9 Poutre [5–8]

Bilan des actions :

- le chargement extérieur $\overrightarrow{p}$
- les actions du reste de la structure sur cette poutre appliquées aux nœuds 5 et 8 : $\{N_{58}, V_{58}, M_{58}, N_{85}, V_{85}, M_{85}\}$

Attention : On travaille ici dans le repère local de la poutre étudiée qui peut être différent du repère global (poutre [1–2]).

Objectifs : Exprimer les relations entre les actions appliquées aux nœuds de la poutre et les déplacements et rotations aux mêmes points.

Déformée : Voir la figure 5.10

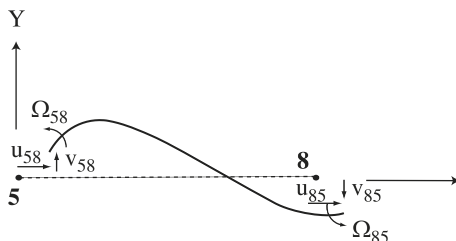


Figure 5.10 Déformée de la poutre [5–8]

Pour la barre [5–8], on peut écrire :

$$\begin{cases} N_{58} = \dfrac{EA}{l}(u_{58} - u_{85}) \\ N_{85} = \dfrac{EA}{l}(u_{85} - u_{58}) \end{cases}$$

ddl supplémentaires

Dans le cas d'une poutre, nous avons des ddl supplémentaires qui sont les déplacements perpendiculaires à la fibre moyenne et les rotations des nœuds. Pour le calcul des relations moment/rotation on peut procéder de la façon suivante :

Posons : $v_{58} = v_{85} = 0$ (Figure 5.11)

On va calculer les moments résultants des rotations imposées :

$$\begin{cases} V(x) = V_{58} \\ M(x) = -M_{58} + V_{58}.x \end{cases}$$

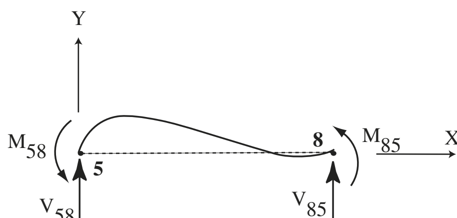


Figure 5.11 Déformée de la poutre [5–8] avec $v_{58} = v_{85} = 0$

avec le PFS :

$$\begin{cases} V_{58} + V_{85} = 0 \\ M_{58} + M_{85} - lV_{58} = 0 \end{cases}$$

Utilisons le théorème de Castigliano avec pour énergie élastique :

$$\frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{(-M_{58} + V_{58}x)^2}{EI}dx$$

On obtient alors les rotations aux appuis Ω_{58} et Ω_{85} en dérivant cette expression par rapport à M_{58} et M_{85} respectivement :

$$\begin{cases} \Omega_{58} = \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}M_{58}} = M_{58}\displaystyle\int_0^l \frac{1}{EI}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx + M_{85}\int_0^l \frac{1}{EI}\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) dx \\ \Omega_{85} = \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}M_{85}} = M_{58}\displaystyle\int_0^l \frac{1}{EI}\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) dx + M_{85}\int_0^l \frac{x^2}{l^2}\frac{1}{EI}dx \end{cases}$$

ce qui donne après inversion (et en considérant EI constant) :

$$\begin{cases} M_{58} = \dfrac{4EI}{l}\Omega_{58} + \dfrac{2EI}{l}\Omega_{85} \\ M_{85} = \dfrac{4EI}{l}\Omega_{85} + \dfrac{2EI}{l}\Omega_{58} \end{cases}$$

En utilisant les équations d'équilibre on peut aussi calculer V_{58} et V_{85} :

$$V_{58} = \frac{6EI}{l^2}(\Omega_{58} + \Omega_{85}) = -V_{85}$$

Posons maintenant : v_{58} et $v_{85} \neq 0$ (figure 5.12).

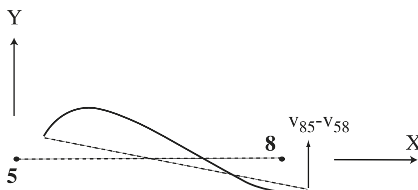


Figure 5.12 Déformée de la poutre [5–8] avec $v_{58} \neq 0$ et $v_{85} \neq 0$

Cela revient à traiter le cas précédent en faisant une rotation de repère d'angle $(v_{85} - v_{58})/l$.

Bilan : on a obtenu les relations entre les efforts aux extrémités d'une poutre et les déplacements aux nœuds :

$$N_{ij} = \frac{EA}{l}(u_{ij} - u_{ji})$$
$$V_{ij} = \frac{6EI}{l^2}\Omega_{ij} + \frac{6EI}{l^2}\Omega_{ji} - \frac{12EI}{l^3}(v_{ji} - v_{ij})$$
$$M_{ij} = \frac{4EI}{l}\Omega_{ij} + \frac{2EI}{l}\Omega_{ji} - \frac{6EI}{l^2}(v_{ji} - v_{ij})$$
$$N_{ji} = \frac{EA}{l}(u_{ji} - u_{ij})$$
$$V_{ji} = -\frac{6EI}{l^2}\Omega_{ij} - \frac{6EI}{l^2}\Omega_{ji} + \frac{12EI}{l^3}(v_{ji} - v_{ij})$$
$$M_{ji} = \frac{4EI}{l}\Omega_{ji} + \frac{2EI}{l}\Omega_{ij} - \frac{6EI}{l^2}(v_{ji} - v_{ij})$$

➤ Effet d'un chargement extérieur

Les actions que l'on vient de calculer (N_{ij}, V_{ij}, M_{ij}) sont les actions permettant d'obtenir les déplacements recherchés aux nœuds sans chargement extérieur. L'effet d'un chargement extérieur est donc inexistant aux nœuds (pas de déplacements supplémentaires). On considérera donc la poutre bi-encastrée soumise à un chargement extérieur (figure 5.13) :

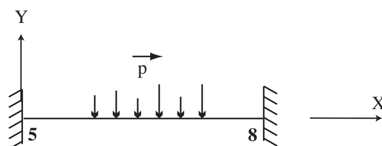


Figure 5.13 Effet d'un chargement extérieur sur la poutre [5–8]

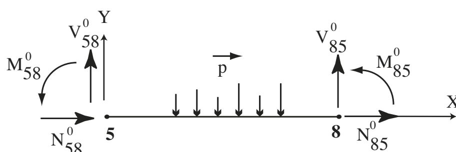


Figure 5.14 Bilan des actions de liaisons pour un chargement extérieur sur la poutre [5–8]

Il faut ensuite calculer les actions de liaisons dues à ce chargement extérieur (N^0_{ij}, V^0_{ij}, M^0_{ij} sur la figure 5.14) et les ajouter aux actions (N_{ij}, V_{ij}, M_{ij}).

Donnons le cas d'un effort ponctuel centré sur la poutre et le cas d'un effort réparti (figure 5.15) :

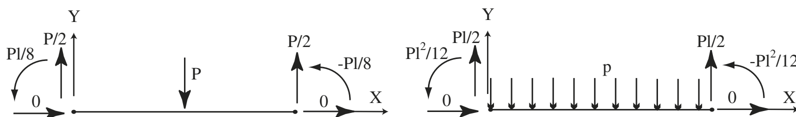


Figure 5.15 Deux cas de chargement sur une poutre bi-encastrée

La superposition de l'effet d'un chargement extérieur et des chargements aux extrémités de la poutre correspondant aux déplacements inconnus permet d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} N_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ V_{ji} \\ M_{ji} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 4EI/l & 0 & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 2EI/l & 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ \Omega_{ij} \\ u_{ji} \\ v_{ji} \\ \Omega_{ji} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^0_{ij} \\ V^0_{ij} \\ M^0_{ij} \\ N^0_{ji} \\ V^0_{ji} \\ M^0_{ji} \end{Bmatrix}$$

Ce qui donne sous forme condensée :

$$\underbrace{\overrightarrow{F}}_{\text{Action ext. aux nœuds}} = \boldsymbol{K} \underbrace{\overrightarrow{u}}_{\text{Déplac}^{ts}\text{ aux nœuds}} + \underbrace{\overrightarrow{F}^0}_{\text{Effet d'un charg}^t\text{ ext. sur la poutre}}$$

La matrice de rigidité $\boldsymbol{K}$ est symétrique. Elle est indépendante du chargement.

Remarque : Les diagrammes des contraintes généralisées dans la poutre s'obtient par superposition. En l'absence de chargement extérieur :

$$\begin{cases} M(x) = -M_{ij} + V_{ij}x \\ V(x) = -V_{ij} \end{cases}$$

Il suffit d'ajouter (par superposition) les diagrammes dus au chargement extérieur appliqué sur la poutre bi-encastrée.

b) Equilibre des nœuds

Considérons maintenant chaque nœud de la structure. Ceux-ci sont sollicités par les barres (action de la barre sur le nœud) + le chargement extérieur appliqué aux nœuds.

Nœud 4 : figure 5.16

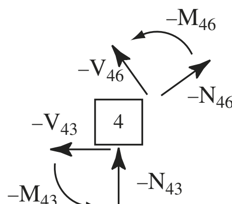


Figure 5.16 Équilibre du nœud 4

On obtient trois équations dans le repère global :

$$\begin{cases} -\overrightarrow{N}_{43}-\overrightarrow{V}_{43}-\overrightarrow{N}_{46}-\overrightarrow{V}_{46}+\overrightarrow{F}_{1}=\overrightarrow{0} & \text{: 2 équations dans le repère glogal} \\ -\overrightarrow{M}_{43}-\overrightarrow{M}_{46}=\overrightarrow{0} & \text{: 1 équation dans le repère glogal} \end{cases}$$

Les liaisons sont parfaites (nœuds rigides). Dans le repère global les déplacements (u, v, Ω) sont identiques pour toutes les barres attachées au nœud considéré (dans le cas d'un encastrement). On peut alors utiliser les relations entre les déplacements globaux et les actions extérieures obtenues pour la barre. On substitue les efforts dans les relations d'équilibre aux nœuds, pour obtenir un système d'équations.

Pour n nœuds on obtient le système :

$$\underbrace{\boldsymbol{K}}_{\text{matrice } 3n\times 3n} \quad \underbrace{\{\overrightarrow{u}\}}_{\text{vecteur } 3n} \quad = \quad \underbrace{\{\overrightarrow{F}\}}_{\substack{\text{vecteur 3n du chargement ext.} \\ \text{(sur les barres et les nœuds)}}}$$

Dans le cas le plus général, on obtient donc un système de $3n$ équations à $3n$ inconnues.

Remarques :

– Le calcul de la matrice $\boldsymbol{K}$ s'effectue à partir de chaque matrice élémentaire. Celle-ci ne dépend donc pas du chargement appliqué et peut être utilisée pour d'autre cas de chargement ; seul $\{\overrightarrow{F}\}$ va changer.

– $\{\overrightarrow{u}\}$ et $\{\overrightarrow{F}\}$ contiennent des quantités connues et inconnues. Par exemple, au nœud 1 dans notre exemple les déplacements sont connus (ils sont nuls ici) tandis que les efforts extérieurs sont inconnus. A l'inverse, au nœud 2 les déplacements sont inconnus tandis que les efforts extérieurs sont connus. Ces conditions sont appelées « conditions aux limites » : statiques (efforts imposés) ou cinématiques (déplacements imposés).

– On peut rajouter à volonté des nœuds dans la structure car pour chaque nœud on écrira alors 3 équations supplémentaires. La décomposition en nœuds et barres est donc « arbitraire ». Ceci s'appelle la « discrétisation » de la structure.

– Si la discrétisation est arbitraire, peut-on choisir un nombre de nœuds très faible ? (voir figure 5.17)

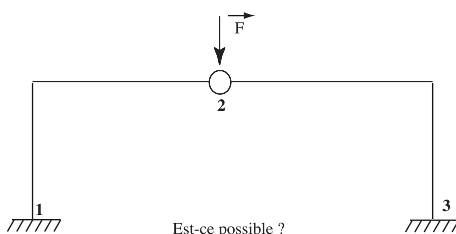


Figure 5.17 Discrétisation minimale ?

Oui mais il faut connaître la matrice de rigidité élémentaire pour la poutre de la figure 5.18 :

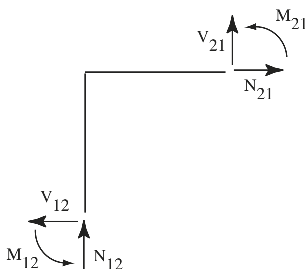


Figure 5.18 Poutre dont il faut connaître la matrice de rigidité

Dans la pratique, on ne calcule pas $\boldsymbol{K}$ pour toutes les géométries possibles. On utilise les matrices de rigidité d'une poutre droite ce qui impose une discrétisation minimale avec 5 nœuds (voir figure 5.19).

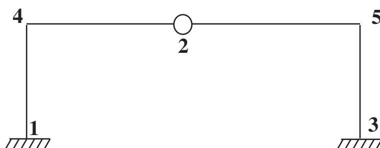


Figure 5.19 Discrétisation minimale avec 5 nœuds

c) Méthodologie – Application

1. Choix d'une discrétisation – Bilan du nombre de déplacements introduits (les ddl).
2. Pour chaque barre, on écrit la matrice de rigidité et les équations : $\overrightarrow{F} = \boldsymbol{K}\,\overrightarrow{u} + \overrightarrow{F}^0$ dans le repère local de la barre.
3. Pour chaque nœud, on écrit dans le repère global à la structure les équations d'équilibres.

4. Passage des relations pour chaque barre dans le repère global et on forme le système d'équations algébriques : $\boldsymbol{K}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{F}$. Identification des quantités connues et inconnues puis résolution.

5.2 POUTRE DROITE À UNE TRAVÉE

Dans cette partie, nous considérerons que :

- la poutre est chargée dans son plan ;
- la déformation de la poutre est alors également dans le plan de la poutre ;
- la section et l'inertie de la poutre sont constantes (EI constant).

5.2.1 Encastrement élastique aux extrémités

Soit la poutre de la figure 5.20, les appuis A et B sont supposés fixes tandis que la travée AB est encastrée élastiquement sur ses appuis. Les raideurs des appuis sont représentées par une constante positive k ce qui signifie que les rotations sont reliées aux moments par $\theta_A = k_A M_A$ et $\theta_B = k_B M_B$. Si l'appui est un encastrement parfait alors $k = \infty$ tandis que pour un appui simple $k = 0$.

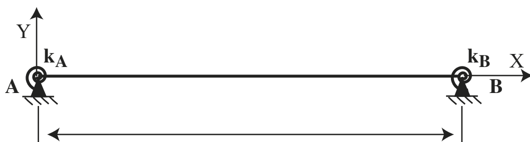


Figure 5.20 Poutre à une travée avec des encastrements élastiques à ces extrémités

Soient le moment fléchissant M_0 et l'effort tranchant V_0 que produiraient dans la section d'abscisse x les charges appliquées si la poutre était isostatique. Le moment fléchissant $M(x)$ et l'effort tranchant $V(x)$ peuvent alors

être obtenus à l'aide des moments sur appuis par :

$$M(x) = M_0(x) + M_A \frac{l-x}{l} + M_B \frac{x}{l}$$
$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_B - M_A}{l} \tag{5.14}$$

On peut calculer les moments M_A et M_B à partir des rotations θ_A et θ_B, rotations que subiraient les appuis A et B si la poutre était isostatique, à partir des relations suivantes :

$$(\alpha + k_A)M_A + \beta M_B = \theta_A \ , \quad \beta M_A + (\gamma + k_B)M_B = -\theta_B \tag{5.15}$$

avec :

$$\alpha = \frac{1}{l^2}\int_0^l \frac{(l-x)^2}{EI}dx$$
$$\beta = \frac{1}{l^2}\int_0^l \frac{x(l-x)}{EI}dx \tag{5.16}$$
$$\gamma = \frac{1}{l^2}\int_0^l \frac{x^2}{EI}dx$$

Ce qui donne :

$$M_A = \frac{\beta\theta_B + (\gamma + k_B)\theta_A}{(\alpha + k_A)(\gamma + k_B) - \beta^2}$$
$$M_B = \frac{\beta\theta_A + (\alpha + k_A)\theta_B}{(\alpha + k_A)(\gamma + k_B) - \beta^2} \tag{5.17}$$

Si la poutre est de section uniforme, nous avons les relations suivantes :

$$\alpha = \gamma = \frac{l}{3EI} \ , \quad \beta = \frac{l}{6EI} \tag{5.18}$$

5.2.2 Formulaire d'une poutre simplement appuyée d'un côté et encastrée de l'autre

Géométrie et Chargement	Réaction d'appui	Moments	Flèche	Rotation
Y, A, a, l, C, P, b, B, X, V(x), x, M(x), x	$R_{xA} = \frac{Pb^2}{2l^3}(3l - b)$ $R_{xB} = \frac{Pa}{2l^3}(3l^2 - a^2)$	$M_B = -\frac{Pab}{2l^2}(2a + b)$ $M_C = \frac{Pab^2}{2l^3}(3l - b)$	$f_C = -\frac{Pa}{96EI}(3l^2 - 5a^2)$	$\theta_A = -\frac{Pab^2}{4EIl}$
$\vec{y}$, A, l/2, C, P, ℓ, l/2, B, $\vec{x}$, V(x), x, M(x), x	$R_{xA} = \frac{5P}{16}$ $R_{xB} = \frac{11P}{16}$	$M_{max} = M_B = -\frac{3Pl}{16}$ $M_C = \frac{5Pl}{32}$	$f_C = \frac{7Pl^3}{768EI}$	$\theta_A = -\frac{Pl^2}{32EI}$

Géométrie et Chargement	Réaction d'appui	Moments	Flèche	Rotation
y, x, A, B, C, D, P, P, a, a, ℓ, V(x), M(x), x	$R_{xA} = \frac{P}{2l^2}(2l^2 - 3al + 3a^2)$ $R_{xB} = \frac{P}{2l^2}(2l^2 + 3al - 3a^2)$	$M_B = -\frac{3Pa}{2}(l - a)$	$f_C = \frac{Pa^2}{12EIl^2}(3l^3 - 5al + 3a^2l - 3a^3)$	$\theta_A = -\frac{Pa}{4}(- \ )$
y, x, A, B, q, a, ℓ, V(x), M(x), x	$R_{xA} = \frac{3ql}{8}$ $R_{xB} = \frac{5ql}{8}$	$M_B = -\frac{ql^2}{8}$	$f_{max} = f_{0,422l} = 0,00542\frac{ql^4}{EI}$	$\theta_A = -\frac{5\ \ ^3}{384EI}$

Géométrie et Chargement	Réaction d'appui	Moments	Flèche	Rotation
	$R_{xA} = \frac{11ql}{64}$ $R_{xB} = \frac{21ql}{64}$	$M_B = \frac{-5ql^2}{64}$ $M_{max} = M_{x=0,415l}$ $= 0,0475ql^2$	$f_{max} = f_{x=0,43l}$ $= 0,00357\frac{ql^4}{EI}$	$\theta_A = -\frac{5\ {}^{3}}{384EI}$
	$R_{xA} = \frac{ql}{10}$ $R_{xB} = \frac{2ql}{5}$	$M_B = \frac{-ql^2}{15}$ $M_{max} = M_{x=0,447l}$ $= 0,0298ql^2$	$f_{max} = f_{x=0,447l}$ $= 0,00239\frac{ql^4}{EI}$	$\theta_A = -\frac{ql^3}{120EI}$

Géométrie et Chargement	Réaction d'appui	Moments	Flèche	Rotation
$\vec{y}$ C A B $\vec{x}$ ℓ V(x) x M(x) x	$R_{xA} = \frac{-3C}{2l}$ $R_{xB} = \frac{3C}{2l}$	$M_B = \frac{-C}{2}$ $M_{max} = M_A = C$	$f_{max} = f_{x=l/3}$ $= \frac{Cl^2}{27EI}$	$\theta_A = -\frac{Cl}{4EI}$
$\vec{y}$ C A C B $\vec{x}$ a b ℓ V(x) x M(x) x	$R_{xA} = \frac{3C}{2l^3}\left(L^2 - a^2\right)$ $R_{xB} = -R_{xA}$	$M_B = \frac{C}{2}\left(1 - 3\frac{a^2}{l^2}\right)$		$\theta_A = -\frac{C}{4EIl}\left(l^2 - 4al \quad a^2\right)$

5.2.3 Formulaire d'une poutre bi-encastrée

Géométrie et Chargement	Réaction d'appui	Moments	Flèche	Rotation
A, C, B, P, l/2, l/2, ℓ, $\vec{y}$, $\vec{x}$, V(x), M(x), x	$R_{xA} = R_{xB} = \frac{P}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{Pl}{8}$ $M_{max} = M_{x=l/2} = \frac{Pl}{8}$	$f_{max} = f_C = \frac{Pl^3}{192EI}$	$\theta_{max} = \theta_{x=l/4} = -\frac{Pl^2}{64EI}$
A, C, B, P, a, b, ℓ, $\vec{y}$, $\vec{x}$, V(x), M(x), x	$R_{xA} = \frac{Pb^2}{l^3}(3a+b)$ $R_{xB} = \frac{Pa^2}{l^3}(a+3b)$	$M_A = \frac{Pab^2}{l^2}$ $M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}$ $M_{max} = M_C = \frac{2Pa^2b^2}{l^3}$		

Géométrie et Chargement	Réaction d'appui	Moments	Flèche
(n-1)P ; A ; B ; a a a a a ; ℓ ; V(x) ; M(x) ; x	$R_{xA} = R_{xB} = \frac{(n-1)P}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{n^2-1}{12n}Pl$ si n impair $M_{max} = \frac{n^2-1}{24n}Pl$ si n pair $M_{max} = \frac{n^2+2}{24n}Pl$	si n impair $f_{max} = \frac{(n^4 - \quad Pl^3}{384n^3EI}$ si n pair $f_{max} = \frac{nPl^3}{384EI}$
q ; A ; B ; a b a ; ℓ ; V(x) ; M(x) ; x	$R_{xA} = R_{xB} = \frac{qb}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{qbl}{24}\left(3 - \frac{b^2}{l^2}\right)$ $M_{max} = \frac{qb}{24l}\left(3l^2 - 3bl + b^2\right)$	$f_{max} = \frac{qb}{384EI}\left(2l^3 - 2b^2l \quad b^3\right)$

Géométrie et Chargement	Réaction d'appui	Moments	Flèche
$\vec{y}$ q_1 q_2 $\vec{x}$ A B ℓ V(x) x M(x) x	$R_{xA} = \dfrac{(7q_1 + 3q_2)l}{20}$ $R_{xB} = \dfrac{(3q_1 + 7q_2)l}{20}$	$M_A = -\dfrac{(3q_1 + 2q_2)l^2}{60}$ $M_B = -\dfrac{(2q_1 + 3q_2)l^2}{60}$	$f_x = \dfrac{x^2}{120EIl}\Big[(3q_1 + 2q_2)\ ^3$ $- (7q_1 + 3q_2 l^2 x + 5q_1 l x^2$ $- (q_1 - q_2)x^3\Big]$

5.2.4 Formulaire d'une poutre console

Géométrie et Chargement	Réaction d'appui	Moments	Flèche	Rotation
	$R_{xA} = \frac{P(2l+3a)}{2l}$ $R_{xB} = \frac{-3Pa}{2l}$	$M_A = -Pa$ $M_B = \frac{Pa}{2}$	$f_C = \frac{Pa^2}{12EI}(3l+4a)$ $f_{max} = f_{x=a+l/3}$ $= \frac{Pal^2}{27EI}$	$\theta_C = \frac{Pa}{4EI}(l+2a)$ $\theta_A = \frac{Pal}{4EI}$
	$R_{xA} = \frac{q}{8l}(3l^2$ $+ 8al + 6a^2)$ $R_{xB} = \frac{q}{8l}(5l^2 - 6a^2)$	$M_A = -\frac{qa^2}{2}$ $M_B = -\frac{q}{8}(l^2 - 2a^2)$	$f_C = \frac{qa}{48EI}(-l^3$ $+ 6a^2l + 6a^3)$	$\theta_C = -\frac{q}{48EI}(l^3$ $- 6a^2l - 8a^3)$ $\theta_A = -\frac{ql}{48EI}$ $(l^2 - 6a^2)$

Géométrie et Chargement	Réaction d'appui	Moments	Flèche	Rotation
$\vec{y}$ q $\vec{x}$ B a A ℓ V(x) x M(x) x	$R_{xA} = \frac{qa}{4l}(4l + 3a)$ $R_{xB} = -\frac{-3qa^2}{4l}$	$M_A = -\frac{qa^2}{2}$ $M_B = \frac{qa^2}{4}$	$f_C = \frac{qa^3}{8EI}(l + a)$	$\theta_C = \frac{qa^2}{24EI}(3l \quad 4\ )$ $\theta_A = \frac{qa^2 l}{8EI}$

5.3 POUTRE CONTINUE

5.3.1 Notations et définitions

Une poutre continue (voir Figure 5.21) est une poutre reposant sur plus de deux appuis simples. Pour une poutre de n travées, on numérote les appuis de 0 à n. La travée i de portée l_i est la travée comprise entre les appuis A_{i-1} et A_i, de moment quadratique I_i suivant l'axe de flexion concerné, de module d'Young E. On appellera $\mathcal{F}_i$ le chargement extérieur sur la travée i.

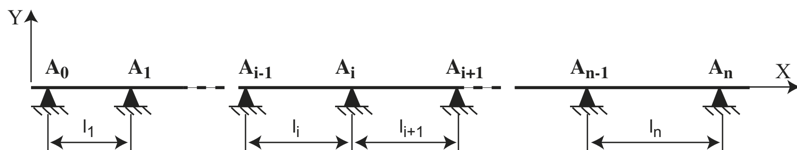


Figure 5.21 Poutre continue

Le nombre des inconnues hyperstatiques est égal au nombre des appuis intermédiaires $(n-1)$. On peut choisir comme inconnues hyperstatiques les moments fléchissants sur les appuis intermédiaires.

5.3.2 Poutre isostatique associée

Une poutre continue comportant n travées peut être décomposée en n poutres isostatiques sur lesquelles s'appliquent les mêmes charges que sur la poutre continue avec en plus les moments aux appuis. Nous obtenons alors pour la travée $i+1$ la figure 5.22 où :

- M_i désigne le moment sur l'appui A_i
- M_{i+1} désigne le moment sur l'appui A_{i+1}
- $M_{i+1}(x)$ désigne le moment fléchissant dans la travée $i+1$ de la poutre continue
- $M_{0,i+1}(x)$ désigne le moment fléchissant dans la travée $i+1$ isostatique associée et chargée uniquement par $\mathcal{F}_{i+1}$ sans les moments sur appuis

– $V_{0,i+1}(x)$ désigne l'effort tranchant dans la travée $i+1$ isostatique associée et chargée uniquement par $\mathcal{F}_{i+1}$ sans les moments sur appuis
– $\Omega^0_{i,d}$ la rotation à droite de l'appui i dans la travée $i+1$ isostatique associée et chargée uniquement par $\mathcal{F}_{i+1}$ sans les moments sur appuis
– $\Omega^0_{i+1,g}$ la rotation à gauche de l'appui $i+1$ dans la travée $i+1$ isostatique associée et chargée uniquement par $\mathcal{F}_{i+1}$ sans les moments sur appuis

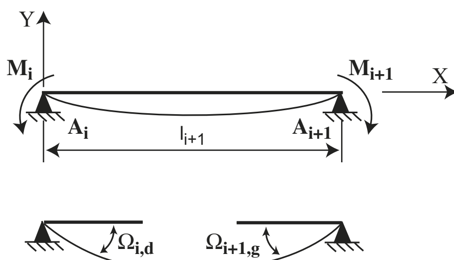


Figure 5.22 Poutre continue

Pour que nos poutres isostatiques associées se comportent comme la poutre continue d'origine, il faut écrire la continuité des rotations sur les différents appuis. Nous obtenons ainsi la formule des trois moments.

5.3.3 Formule des trois moments

a) Travées quelconques

$$M_{i-1}\left(\frac{l_i}{6EI_i}\right)+2M_i\left(\frac{l_i}{6EI_i}+\frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}}\right)+M_{i+1}\left(\frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}}\right)=\left(\Omega^0_{i,d}-\Omega^0_{i,g}\right) \tag{5.19}$$

b) Travées de mêmes inerties

$$M_{i-1}l_i+2M_i(l_i+l_{i+1})+M_{i+1}l_{i+1}=6EI\left(\Omega^0_{i,d}-\Omega^0_{i,g}\right) \tag{5.20}$$

c) Travées identiques

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6EI}{l}\left(\Omega^0_{i,d} - \Omega^0_{i,g}\right) \tag{5.21}$$

d) Travées quelconques avec dénivellations d'appui

Les dénivellations d'appui (v_i pour l'appui A_i par exemple) sont comptées positivement vers le haut.

$$M_{i-1}\left(\frac{l_i}{6EI_i}\right) + 2M_i\left(\frac{l_i}{6EI_i} + \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}}\right) + M_{i+1}\left(\frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}}\right) = \left(\Omega^0_{i,d} - \Omega^0_{i,g}\right) + \frac{v_{i+1} - v_i}{l_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{l_i} \tag{5.22}$$

5.3.4 Expression des sollicitations et actions de liaison

Les sollicitations dans la travée hyperstatique i sont déterminées par superposition des sollicitations dues au chargement extérieur et celles dues aux moments sur appuis.

Soit, pour le moment fléchissant, on peut écrire :

$$M_i(x) = M_{0i}(x) + M_{i-1}\left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + M_i\left(\frac{x}{l_i}\right) \tag{5.23}$$

De même pour l'effort tranchant :

$$V_i(x) = V_{0i}(x) + \frac{M_{i-1}}{l_i} - \frac{M_i}{l_i} \tag{5.24}$$

On déduit les actions de liaisons de l'appui A_i des valeurs de l'effort tranchant à droite et à gauche de celui-ci :

$$Y_{A_i} = V_i(l_i) - V_{i+1}(0) \tag{5.25}$$

ce qui donne pour des travées quelconques :

$$Y_{A_i} = Y^0_{A_i} + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} - \frac{M_i - M_{i+1}}{l_{i+1}} \tag{5.26}$$

et pour des travées de longueurs identiques :

$$Y_{A_i} = Y_{A_i}^0 + \frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{l} \tag{5.27}$$

5.3.5 Formulaire des rotations usuelles

Cas d'une poutre sur deux appuis simples de rigidité EI constante.

Géométrie et chargement	$\Omega_{i-1,d}^0$	$\Omega_{i,g}^0$
Y, X, A_{i-1}, A_i, P, a, b, l	$-\dfrac{Pab(l+b)}{6EIl}$	$\dfrac{Pab(l+a)}{6EIl}$
Y, X, A_{i-1}, A_i, P, l/2, l/2, l	$-\dfrac{Pl^2}{16EI}$	$\dfrac{Pl^2}{16EI}$
Y, X, A_{i-1}, A_i, q, l	$-\dfrac{ql^3}{24EI}$	$\dfrac{ql^3}{24EI}$
Y, X, A_{i-1}, A_i, q, a, b, l	$-\dfrac{qa^2(2l-a)^2}{24EIl}$	$\dfrac{qa^2(2l^2-a^2)}{24EIl}$

a) Exemple d'application :

Soit la poutre continue à quatre travées de la figure 5.23. Supposons les moments d'inertie suivants : $I_1 = 1$, $I_2 = I_3 = 2$ et $I_4 = 1,5$.

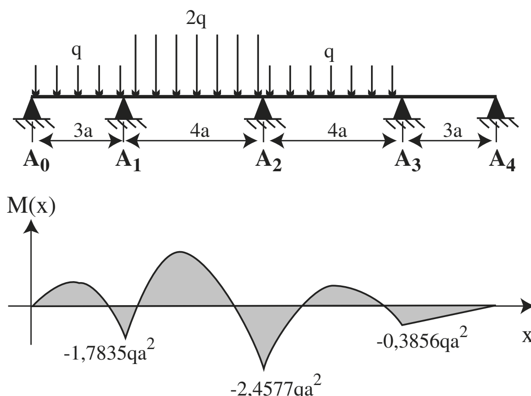


Figure 5.23 Exemple d'application de la formule des trois moments

La formule des trois moments nous donne :

$$
\begin{aligned}
&M_0\left(\frac{l_1}{6EI_1}\right) + 2M_1\left(\frac{l_1}{6EI_1} + \frac{l_2}{6EI_2}\right) + M_2\left(\frac{l_2}{6EI_2}\right) = \left(\Omega^0_{1,d} - \Omega^0_{1,g}\right)\\
&M_1\left(\frac{l_2}{6EI_2}\right) + 2M_2\left(\frac{l_2}{6EI_2} + \frac{l_3}{6EI_3}\right) + M_3\left(\frac{l_3}{6EI_3}\right) = \left(\Omega^0_{2,d} - \Omega^0_{2,g}\right)\\
&M_2\left(\frac{l_3}{6EI_3}\right) + 2M_3\left(\frac{l_3}{6EI_3} + \frac{l_4}{6EI_4}\right) + M_4\left(\frac{l_4}{6EI_4}\right) = \left(\Omega^0_{3,d} - \Omega^0_{3,g}\right)
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
M_0 &= 0\\
\Omega^0_{1,g} &= \frac{q(3a)^3}{24EI_1}\\
\Omega^0_{1,d} &= -\frac{2q(4a)^3}{24EI_2}\\
\Omega^0_{2,g} &= \frac{2q(4a)^3}{24EI_2}\\
\Omega^0_{2,d} &= -\frac{q(3a)^3}{24EI_3}\\
\Omega^0_{3,g} &= \frac{q(3a)^3}{24EI_3}\\
\Omega^0_{3,d} &= 0\\
M_4 &= 0
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

Ce qui donne après résolution du système de 3 équations à 3 inconnues :

$$
\begin{aligned}
M_1 &= -1,7835qa^2\\
M_2 &= -2,4577qa^2\\
M_3 &= -0,3856qa^2
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

5.3.6 Formulaire de la poutre continue à 2 travées égales

Géométrie et chargement	Moment sur appui et réaction d'appui
P, A_0, A_1, A_2, l/2	$M_1 = -\frac{3}{32}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{13}{32}P \quad Y_{A_1} = \frac{11}{16}P \quad Y_{A_2} = -\frac{3}{32}P$
P, P, A_0, A_1, A_2, l/2, l/2	$M_1 = -\frac{3}{16}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{5}{16}P \quad Y_{A_1} = \frac{11}{8}P \quad Y_{A_2} = \frac{5}{16}P$

Géométrie et chargement	Moment sur appui et réaction d'appui
P P A0 A1 A2 ; l/3 l/3 l/3	$M_1 = -\frac{1}{6}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{5}{6}P \quad Y_{A_1} = \frac{8}{6}P \quad Y_{A_2} = -\frac{1}{6}P$
P P P P A0 A1 A2 ; l/3 l/3 l/3 l/3 l/3 l/3	$M_1 = -\frac{1}{3}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{2}{3}P \quad Y_{A_1} = \frac{8}{3}P \quad Y_{A_2} = \frac{2}{3}P$
P P P A0 A1 A2 ; l/4 l/4 l/4 l/4	$M_1 = -\frac{15}{64}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{81}{64}P \quad Y_{A_1} = \frac{126}{64}P \quad Y_{A_2} = -\frac{15}{64}P$
P P P P P P A0 A1 A2 ; l/4 l/4 l/4 l/4 l/4 l/4 l/4 l/4	$M_1 = -\frac{15}{32}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{33}{32}P \quad Y_{A_1} = \frac{126}{32}P \quad Y_{A_2} = \frac{33}{32}P$
q ; A0 A1 A2	$M_1 = -\frac{3}{48}ql^2$ $Y_{A_0} = \frac{7}{16}ql \quad Y_{A_1} = \frac{15}{24}ql \quad Y_{A_2} = -\frac{3}{48}ql$
q q ; A0 A1 A2	$M_1 = -\frac{ql^2}{8}$ $Y_{A_0} = \frac{3}{8}ql \quad Y_{A_1} = \frac{5}{4}ql \quad Y_{A_2} = \frac{3}{8}ql$

5.3.7 Formulaire de la poutre continue à 3 travées égales

Géométrie et chargement	Moment sur appui et réaction d'appui
P ; A0 A1 A2 A3 ; l/2	$M_1 = -\frac{3}{10}Pl \quad M_2 = \frac{3}{40}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{1}{5}P \quad Y_{A_1} = \frac{47}{40}P$ $Y_{A_2} = -\frac{9}{20}P \quad Y_{A_3} = \frac{3}{40}P$
P ; A0 A1 A2 A3 ; l/2	$M_1 = -\frac{3}{40}Pl \quad M_2 = -\frac{3}{40}Pl$ $Y_{A_0} = -\frac{3}{40}P \quad Y_{A_1} = \frac{23}{40}P$ $Y_{A_2} = \frac{23}{40}P \quad Y_{A_3} = -\frac{3}{40}P$
P P ; A0 A1 A2 A3 ; l/2 l/2	$M_1 = -\frac{3}{10}Pl \quad M_2 = -\frac{1}{20}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{1}{5}P \quad Y_{A_1} = \frac{31}{20}P$ $Y_{A_2} = \frac{3}{10}P \quad Y_{A_3} = -\frac{1}{20}P$
P P P ; A0 A1 A2 A3 ; l/2 l/2 l/2	$M_1 = -\frac{3}{20}Pl \quad M_2 = -\frac{3}{20}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{7}{20}P \quad Y_{A_1} = \frac{23}{20}P$ $Y_{A_2} = \frac{23}{20}P \quad Y_{A_3} = \frac{7}{20}P$

Géométrie et chargement	Moment sur appui et réaction d'appui
q A_0 A_1 A_2 A_3	$M_1 = -\frac{1}{15}ql^2$ $M_2 = \frac{1}{60}ql^2$ $Y_{A_0} = \frac{13}{30}ql$ $Y_{A_1} = \frac{13}{20}ql$ $Y_{A_2} = -\frac{1}{10}ql$ $Y_{A_3} = \frac{1}{60}ql$
q A_0 A_1 A_2 A_3	$M_1 = -\frac{1}{20}ql^2$ $M_2 = -\frac{1}{20}ql^2$ $Y_{A_0} = -\frac{1}{20}ql$ $Y_{A_1} = \frac{11}{20}ql$ $Y_{A_2} = \frac{11}{20}ql$ $Y_{A_3} = -\frac{1}{20}ql$
q q A_0 A_1 A_2 A_3	$M_1 = -\frac{7}{60}ql^2$ $M_2 = -\frac{1}{30}ql^2$ $Y_{A_0} = \frac{23}{60}ql$ $Y_{A_1} = \frac{18}{15}ql$ $Y_{A_2} = \frac{9}{20}ql$ $Y_{A_3} = -\frac{1}{30}ql$
q q q A_0 A_1 A_2 A_3	$M_1 = -\frac{1}{10}ql^2$ $M_2 = -\frac{1}{10}ql^2$ $Y_{A_0} = \frac{2}{5}ql$ $Y_{A_1} = \frac{11}{10}ql$ $Y_{A_2} = \frac{11}{10}ql$ $Y_{A_3} = \frac{2}{5}ql$

5.3.8 Formulaire de la poutre continue à 4 travées égales

Géométrie et chargement	Moment sur appui
P, P ; A_0 A_1 A_2 A_3 A_4	$M_1 = -0,080Pl$ $M_2 = -0,054Pl$
P P, P P ; A_0 A_1 A_2 A_3 A_4	$M_1 = -0,090Pl$ $M_2 = 0,095Pl$ $M_3 = -0,090Pl$
q, q ; A_0 A_1 A_2 A_3 A_4	$M_1 = -0,071ql^2$ $M_2 = 0,036ql^2$ $M_3 = -0,071ql^2$
q, q ; A_0 A_1 A_2 A_3 A_4	$M_1 = -0,054ql^2$ $M_2 = -0,036ql^2$
q, q, q ; A_0 A_1 A_2 A_3 A_4	$M_1 = -0,121ql^2$ $M_2 = -0,018ql^2$ $M_3 = -0,058ql^2$

5.3.9 Formulaire de la poutre continue à 5 travées égales

Géométrie et chargement	Moment sur appui
P P A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5	$M_1 = -0,106Pl$ $M_2 = 0,048Pl$ $M_3 = -0,088Pl$ $M_2 = -0,072Pl$
P P P P P P A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5	$M_1 = -0,140Pl$ $M_2 = -0,105Pl$ $M_3 = -0,105Pl$ $M_4 = -0,140Pl$
q A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5	$M_1 = -0,105ql^2$ $M_2 = -0,079ql^2$ $M_3 = -0,079ql^2$ $M_4 = -0,105ql^2$
q q q A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5	$M_1 = -0,053ql^2$ $M_2 = -0,039ql^2$ $M_3 = -0,039ql^2$ $M_4 = -0,053ql^2$

5.3.10 Poutre continue sur appuis élastiques ponctuels

a) Cas général : formule des cinq moments

Par hypothèse, les dénivellations d'appui sont dans ce cas proportionnelles aux réactions d'appui :

$$v_i = -k_i Y_{A_i} \tag{5.31}$$

On obtient donc à l'aide de la formule (5.26) :

$$v_i = -k_i \left[Y^0_{A_i} + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} - \frac{M_i - M_{i+1}}{l_{i+1}} \right] \tag{5.32}$$

En remplaçant les expressions de v_i dans la formule des trois moments avec dénivellation d'appui on obtient la formule des cinq moments :

$$\begin{aligned}
&\frac{k_{i-1}}{l_{i-1} l_i} M_{i-2} \\
&+ \left[\left(\frac{l_i}{6EI_i} \right) - \frac{k_{i-1}}{l_i} \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i} \right) - \frac{k_i}{l_i} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) \right] M_{i-1} \\
&+ \left[2 \left(\frac{l_i}{6EI_i} + \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}} \right) + \frac{k_{i-1}}{l_i^2} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right)^2 + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}^2} \right] M_i \\
&+ \left[\left(\frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}} \right) - \frac{k_i}{l_{i+1}} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) - \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\frac{1}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}} \right) \right] M_{i+1} \\
&+ \frac{k_{i+1}}{l_{i+1} l_{i+2}} M_{i+2} \\
&= \left(\Omega^0_{i,d} - \Omega^0_{i,g} \right) - \frac{k_{i-1}}{l_i} Y^0_{A_{i-1}} + k_i \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) Y^0_{A_i} - \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} Y^0_{A_{i+1}}
\end{aligned} \tag{5.33}$$

On utilise cette formule notamment dans l'étude des systèmes de poutres croisées.

b) Cas d'une poutre infiniment rigide

L'application de la formule des cinq moments à une poutre dite infiniment rigide mettrait en évidence des déplacements v_i et en conséquence des réactions d'appui Y_{A_i} fonctions linéaires des abscisses x. Soit :

$$Y_{A_i} = \frac{Pk_i}{\sum k_i}\left(1 + \frac{e\sum k_i}{\sum x_i^2 k_i} xi\right) \tag{5.34}$$

en supposant l'origine O choisie de sorte que $\sum x_i k_i = 0$ et en désignant par P la résultante de l'ensemble des charges appliquées et par e sa position (voir figure 5.24).

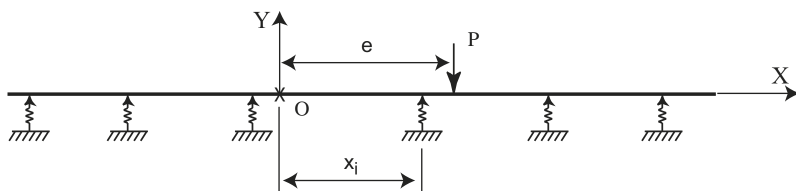


Figure 5.24

Les sollicitations en une section Σ de la poutre sont obtenues en faisant une coupure dans cette section et en écrivant l'équilibre des forces de gauche (ou de droite).

5.4 SYSTÈMES DE POUTRES CROISÉES

5.4.1 Principe

Les systèmes de poutres croisées sont calculés par l'une des méthodes suivantes :

– la méthode directe, c'est-à-dire l'écriture de l'égalité des déplacements verticaux aux point de croisement des poutres, sous l'action des charges appliquées,

– la résolution de l'équation des cinq moments (équation 5.33),
– l'utilisation de codes de calcul appliqués sur un modèle faisant intervenir les liaisons à chaque croisement des poutres.

5.4.2 Cas particulier des poutres de même inertie

Si on suppose que toutes les poutres sont simplement appuyées, de même inertie, de raideur de torsion négligeable et soumises à un chargement P à chaque intersection, l'application des méthodes précédentes conduit à des résultats simples dans les cas suivants :

Géométrie	Poutres $\mathcal{A}$	Poutres $\mathcal{B}$
$\mathcal{B}$; $\mathcal{A}$; $l_b=2b$; $l_a=2a$	$M = \dfrac{b^3}{4(a^3+b^3)}Pl_a$ $V = \dfrac{b^3}{2(a^3+b^3)}P$	$M = \dfrac{a^3}{4(a^3+b^3)}Pl_b$ $V = \dfrac{a^3}{2(a^3+b^3)}P$
$\mathcal{B}$ $\mathcal{B}$; $\mathcal{A}$; $l_b=2b$; $l_a=3a$	$M = \dfrac{b^3}{3(5a^3+b^3)}Pl_a$ $V = \dfrac{b^3}{5a^3+b^3}P$	$M = \dfrac{5a^3}{4(5a^3+b^3)}Pl_b$ $V = \dfrac{5a^3}{2(5a^3+b^3)}P$
$\mathcal{B}$ $\mathcal{B}$; $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}$; $l_b=3b$; $l_a=3a$	$M = \dfrac{b^3}{3(a^3+b^3)}Pl_a$ $V = \dfrac{b^3}{a^3+b^3}P$	$M = \dfrac{a^3}{3(a^3+b^3)}Pl_b$ $V = \dfrac{a^3}{a^3+b^3}P$

5.4.3 Cas particulier des poutres infiniment rigides dans une direction

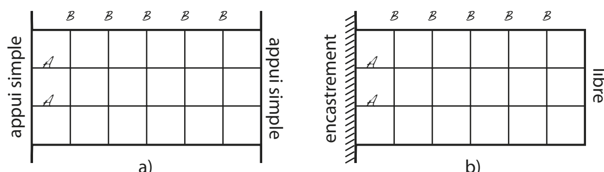


Figure 5.25

Soit le cas particulier du système de poutres croisées représenté à la figure 5.25. Les poutres $\mathcal{B}$ sont supposées infiniment rigides (admissible lorsque $l_b < 2l_a$ et si la hauteur des poutres $\mathcal{B} \simeq$ hauteur des poutres $\mathcal{A}$). Dans ce cas particulier, on peut considérer qu'une poutre $\mathcal{B}$ peut être considérée comme rigide et appuyée sur des appuis élastiques ponctuels. Nous pouvons donc utiliser l'équation (5.34) pour déterminer les réactions Y_{A_i}. Dans la mesure où les poutres $\mathcal{A}$ suivent la même loi de variation d'inertie, on peut substituer aux coefficients k_i les inerties des poutres I_i. Nous obtenons alors :

$$Y_{A_i} = \frac{P I_i}{\sum I_i}\left(1 + \frac{e \sum I_i}{\sum x_i^2 I_i} xi\right) \tag{5.35}$$

5.5 POUTRE SUR APPUI ÉLASTIQUE CONTINU

5.5.1 Définition et paramètres

On considère la poutre de largeur b, d'inertie constante, reposant sur un appui continu élastique (de type sol) de la figure 5.26.

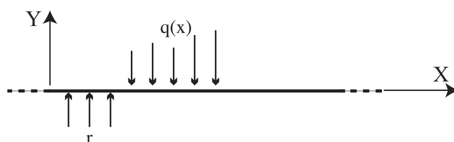


Figure 5.26

Si y désigne la flèche de la poutre au point d'abscisse x, la réaction d'appui en ce point est équivalente à une densité d'effort r :

$$r = -kby \tag{5.36}$$

où b est la largeur de la poutre supposée constante, k est la raideur de l'appui élastique. Si $q(x)$ est la charge répartie appliquée à la poutre, la flèche doit satisfaire l'équation différentielle d'équilibre suivante :

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + kby + q(x) = 0 \tag{5.37}$$

Pour résoudre cette équation, on pose :

$$\frac{1}{l_e} = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI}} = \lambda \tag{5.38}$$

La longueur l_e est appelée longueur élastique de la poutre. Les solutions $y(x)$, $y'(x)$, $M(x)$ et $V(x)$ font intervenir des fonctions $\mathcal{W}(x)$, $\mathcal{X}(x)$, $\mathcal{Y}(x)$ et $\mathcal{Z}(x)$ suivantes :

$$\text{pour } x > 0 : \quad \begin{aligned} \mathcal{W}(x) &= -e^{-\lambda x}(\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x)) \\ \mathcal{X}(x) &= e^{-\lambda x}\sin(\lambda x) \\ \mathcal{Y}(x) &= e^{-\lambda x}(\cos(\lambda x) - \sin(\lambda x)) \\ \mathcal{Z}(x) &= -e^{-\lambda x}\cos(\lambda x) \end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\text{pour } x < 0 : \quad \begin{aligned} \mathcal{W}(x) &= -e^{\lambda x}(\cos(\lambda x) - \sin(\lambda x)) \\ \mathcal{X}(x) &= e^{\lambda x}\sin(\lambda x) \\ \mathcal{Y}(x) &= e^{\lambda x}(\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x)) \\ \mathcal{Z}(x) &= e^{\lambda x}\cos(\lambda x) \end{aligned} \tag{5.40}$$

5.5.2 Formulaire de la poutre infinie

Géométrie et chargement	Solutions
Y P X O	$y' = \frac{P\lambda^2}{kb}\mathcal{X}(x)$ $\quad y = \frac{P\lambda}{2kb}\mathcal{W}(x)$ $M = \frac{P}{4\lambda}\mathcal{Y}(x)$ $\quad V = \frac{P}{2}\mathcal{Z}(x)$
Y C X O	$y' = \frac{C\lambda^3}{kb}\mathcal{Y}(x)$ $\quad y = \frac{C\lambda^2}{2kb}\mathcal{X}(x)$ $M = \frac{C}{2}\mathcal{Z}(x)$ $\quad V = -\frac{C\lambda}{2}\mathcal{W}(x)$
Y q X O a a	pour $0 < x < a$: $y' = \frac{q\lambda}{2kb}\left[\mathcal{W}(a+x) - \mathcal{W}(a-x)\right]$ $y = -\frac{q}{2kb}\left[2 + \mathcal{Z}(a+x) + \mathcal{Z}(a-x)\right]$ $M = \frac{q}{4\lambda^2}\left[\mathcal{X}(a+x) + \mathcal{X}(a-x)\right]$ $V = -\frac{q}{4\lambda}\left[-\mathcal{Y}(a+x) + \mathcal{Y}(a-x)\right]$ pour $x > a$: $y' = \frac{q\lambda}{2kb}\left[\mathcal{W}(x+a) - \mathcal{W}(x-a)\right]$ $y = -\frac{q}{2kb}\left[\mathcal{Z}(x+a) - \mathcal{Z}(x-a)\right]$ $M = \frac{q}{4\lambda^2}\left[\mathcal{X}(x+a) - \mathcal{X}(x-a)\right]$ $V = -\frac{q}{4\lambda}\left[-\mathcal{Y}(x+a) + \mathcal{Y}(x-a)\right]$

Géométrie et chargement	Solutions
	$y'(0) = -\frac{q}{2kba}\left[1 + \lambda a\mathcal{W}(a) + \mathcal{Z}(a)\right]$ $y'(a) = -\frac{q}{2kba}\left[1 - \lambda a + \mathcal{Z}(a)\right]$ $y(0) = -\frac{q}{4\lambda kba}\left[1 - \mathcal{Y}(a) + 2\lambda a\mathcal{Z}(a)\right]$ $y(a) = -\frac{q}{4\lambda kba}\left[2\lambda a - 1 + \mathcal{Y}(a)\right]$ pour $0 < x < a$: $M = \frac{q}{8\lambda^3 a}\left[\mathcal{W}(x) - \mathcal{W}(a-x) + 2\lambda a\mathcal{X}(a-x)\right]$ $V = \frac{q}{4\lambda^2 a}\left[\mathcal{X}(x) + \mathcal{X}(a-x) - \lambda a\mathcal{Y}(a-x)\right]$ pour $x > a$: $M = \frac{q}{8\lambda^3 a}\left[\mathcal{W}(x) - \mathcal{W}(x-a) - 2\lambda a\mathcal{X}(x-a)\right]$ $V = \frac{q}{4\lambda^2 a}\left[\mathcal{X}(x) - \mathcal{X}(x-a) - \lambda a\mathcal{Y}(x-a)\right]$

5.5.3 Formulaire de la poutre semi-infinie

Pour obtenir les déformations et les sollicitations dans une poutre semi-infinie, on utilise les résultats de la poutre infinie en appliquant une force P_0 et un couple C_0 juste à gauche de O (voir figure 5.27) de telle façon que sous l'ensemble du chargement M et V soient nuls en O. On peut écrire :

$$P_0 = 4(\lambda M_0 + V_0) \qquad C_0 = \frac{2}{\lambda}(2\lambda M_0 + V_0) \tag{5.41}$$

avec M_0 et V_0 le moment et l'effort tranchant dus à $q(s)$ pour la poutre infinie juste à gauche de O.

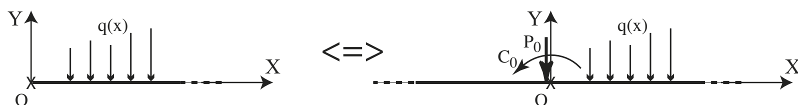


Figure 5.27

On obtient alors pour la poutre semi-infinie :

$$\begin{aligned}
y'(x) &= y_1'(x) + \frac{P_0\lambda^2}{kb}\mathcal{X}(x) + \frac{C_0\lambda^3}{kb}\mathcal{Y}(x)\\
y(x) &= y_1(x) + \frac{P_0\lambda}{2kb}\mathcal{W}(x) + \frac{C_0\lambda^2}{kb}\mathcal{X}(x)\\
M(x) &= M_1(x) + \frac{P_0}{4\lambda}\mathcal{Y}(x) + \frac{C_0}{2}\mathcal{Z}(x)\\
V(x) &= V_1(x) + \frac{P_0}{2}\mathcal{Z}(x) - \frac{C_0\lambda}{2}\mathcal{W}(x)
\end{aligned} \tag{5.42}$$

avec y_1', y_1, M_1 et V_1 les solutions obtenues pour la poutre infinie soumise au chargement $q(x)$.

Géométrie et chargement	Solutions
Y, c, P, X, O	$P_0 = P[\mathcal{Y}(c) - 2\mathcal{Z}(c)]$ $C_0 = \frac{P}{\lambda}[\mathcal{Y}(c) - \mathcal{Z}(c)]$ Cas particulier $c = 0$: $y' = \frac{2P\lambda^2}{kb}\mathcal{W}(x) \quad y'(0) = \frac{2P\lambda^2}{kb}$ $y = \frac{2P\lambda}{kb}\mathcal{Z}(x) \quad y(0) = -\frac{2P\lambda}{kb}$ $M = -\frac{P}{\lambda}\mathcal{X}(x) \quad M(0) = 0$ $V = -P\mathcal{Y}(x) \quad V(0) = -P$

Géométrie et chargement	Solutions
Y, c, C, X, O	$P_0 = -2C\lambda\left[\mathcal{Z}(c) + \mathcal{W}(c)\right]$ $C_0 = -C\left[2\mathcal{Z}(c) + \mathcal{W}(c)\right]$ Cas particulier $c = 0$: $y' = -\dfrac{4C\lambda^3}{kb}\mathcal{Z}(x) \quad y'(0) = \dfrac{4C\lambda^3}{kb}$ $y = -\dfrac{2C\lambda^2}{kb}\mathcal{Y}(x) \quad y(0) = -\dfrac{2C\lambda^2}{kb}$ $M = C\mathcal{W}(x) \quad M(0) = -C$ $V = 2C\lambda\mathcal{X}(x) \quad V(0) = 0$
Y, c, q, X, O, 2a	$P_0 = \dfrac{q}{\lambda}\left[\mathcal{X}(2a+c) - \mathcal{X}(c) - \mathcal{Y}(2a+c) + \mathcal{Y}(c)\right]$ $C_0 = \dfrac{q}{2\lambda^2}\left[2\mathcal{X}(2a+c) - 2\mathcal{X}(c) - \mathcal{Y}(2a+c) + \mathcal{Y}(c)\right]$ Cas particulier $2a = \infty$: $P_0 = \dfrac{q}{\lambda}\left[\mathcal{Y}(c) - \mathcal{X}(c)\right]$ $C_0 = \dfrac{q}{2\lambda^2}\left[\mathcal{Y}(c) - 2\mathcal{X}(c)\right]$ Cas particulier $c = 0$: $y'(x) = 0 \quad y(x) = -\dfrac{q}{kb}$ $M = 0 \quad V = 0$

a) Poutre semi-infinie articulée à l'origine

Pour obtenir les déformations et les sollicitations dans une poutre semi-infinie articulée en son origine (voir figure 5.28), on utilise les résultats de la poutre semi-infinie. La réaction verticale sous l'articulation s'écrit :

$$R = -\frac{kby_1(0)}{2\lambda} \tag{5.43}$$

avec $y_1(0)$ le déplacement vertical du point O de la poutre semi-infinie non articulée sous l'effet du chargement extérieur $q(x)$.

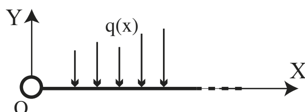


Figure 5.28

On obtient alors pour la poutre semi-infinie articulée en son origine :

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_1'(x) + \frac{2R\lambda^2}{kb}\mathcal{W}(x) \\ y(x) &= y_1(x) - \frac{2R\lambda}{kb}\mathcal{Z}(x) \\ M(x) &= M_1(x) + \frac{R}{\lambda}\mathcal{X}(x) \\ V(x) &= V_1(x) + R\mathcal{Y}(x) \end{aligned} \qquad (5.44)$$

avec y_1', y_1, M_1 et V_1 les solutions obtenues pour la poutre semi-infinie soumise au même chargement $q(x)$.

5.5.4 Formulaire de la poutre de longueur finie

Pour étudier une poutre AB de longueur finie l soumise à un chargement extérieur $\mathcal{F}_{ext}$, il suffit de superposer les efforts obtenus dans une poutre infinie de même inertie, résultant des deux cas suivants :

- poutre infinie soumise à $\mathcal{F}_{ext}$. Détermination de V_A, M_A et V_B, M_B respectivement dans les sections A et B.
- poutre infinie soumise en A à la force et au moment ponctuels P_A et C_A ainsi qu'à P_B et C_B en B.

Pour obtenir un système équivalent à la poutre finie, il faut écrire que les efforts tranchants et les moments fléchissants doivent être nuls en A et

B. On obtient un système de 4 équations à 4 inconnues P_A, C_A, P_B, C_B à résoudre :

$$\begin{aligned} P_A + P_B\mathcal{Z}(l) - C_A\lambda + C_B\lambda\mathcal{W}(l) - 2V_A &= 0 \\ P_A\mathcal{Z}(l) + P_B - C_A\lambda\mathcal{W}(l) + C_B\lambda + 2V_B &= 0 \\ P_A + P_B\mathcal{Y}(l) - 2C_A\lambda - 2C_B\lambda\mathcal{Z}(l) + 4\lambda M_A &= 0 \\ P_A\mathcal{Y}(l) + P_B + 2C_A\lambda\mathcal{Z}(l) + 2C_B\lambda + 4M_B &= 0 \end{aligned} \tag{5.45}$$

On obtient alors pour la poutre finie de longueur l :

$$\begin{aligned} y'(x) &= y'_1(x) + \frac{P_A\lambda^2}{kb}\mathcal{X}(x) + \frac{C_A\lambda^3}{kb}\mathcal{Y}(x) - \frac{P_B\lambda^2}{kb}\mathcal{X}(l-x) + \frac{C_B\lambda^3}{kb}\mathcal{Y}(l-x) \\ y(x) &= y_1(x) + \frac{P_A\lambda}{2kb}\mathcal{W}(x) + \frac{C_A\lambda^2}{kb}\mathcal{X}(x) + \frac{P_B\lambda}{2kb}\mathcal{W}(l-x) - \frac{C_B\lambda^2}{kb}\mathcal{X}(l-x) \\ M(x) &= M_1(x) + \frac{P_A}{4\lambda}\mathcal{Y}(x) + \frac{C_A}{2}\mathcal{Z}(x) + \frac{P_B}{4\lambda}\mathcal{Y}(l-x) - \frac{C_B}{2}\mathcal{Z}(l-x) \\ V(x) &= V_1(x) + \frac{P_A}{2}\mathcal{Z}(x) - \frac{C_A\lambda}{2}\mathcal{W}(x) - \frac{P_B}{2}\mathcal{Z}(l-x) - \frac{C_B\lambda}{2}\mathcal{W}(l-x) \end{aligned} \tag{5.46}$$

avec y'_1, y_1, M_1 et V_1 les solutions obtenues pour la poutre infinie soumise au même chargement extérieur $\mathcal{F}_{ext}$ avec l'abscisse x mesurée à partir de A.

a) Cas particulier d'un chargement symétrique par rapport au milieu de la poutre *AB*

La symétrie entraîne $V_B = -V_A$, $M_B = M_A$, $P_B = P_A$ et $C_B = -C_A$. Le système précédent de 4 équations à 4 inconnues devient un système de deux équations à deux inconnues P_A et C_A :

$$\begin{aligned} P_A[1 + \mathcal{Z}(l)] - C_A\lambda[1 + \mathcal{W}(l)] - 2V_A &= 0 \\ P_A[1 + \mathcal{Y}(l)] - 2C_A\lambda[1 - \mathcal{Z}(l)] + 4\lambda M_A &= 0 \end{aligned} \tag{5.47}$$

et

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= y_1'(x) + \frac{P_A\lambda^2}{kb}\left[\mathcal{X}(x) - \mathcal{X}(l-x)\right] + \frac{C_A\lambda^3}{kb}\left[\mathcal{Y}(x) - \mathcal{Y}(l-x)\right] \\
y(x) &= y_1(x) + \frac{P_A\lambda}{2kb}\left[\mathcal{W}(x) + \mathcal{W}(l-x)\right] + \frac{C_A\lambda^2}{kb}\left[\mathcal{X}(x) + \mathcal{X}(l-x)\right] \\
M(x) &= M_1(x) + \frac{P_A}{4\lambda}\left[\mathcal{Y}(x) + \mathcal{Y}(l-x)\right] + \frac{C_A}{2}\left[\mathcal{Z}(x) - \mathcal{Z}(l-x)\right] \\
V(x) &= V_1(x) + \frac{P_A}{2}\left[\mathcal{Z}(x) - \mathcal{Z}(l-x)\right] - \frac{C_A\lambda}{2}\left[\mathcal{W}(x) - \mathcal{W}(l-x)\right]
\end{aligned}
\tag{5.48}
$$

Remarque :

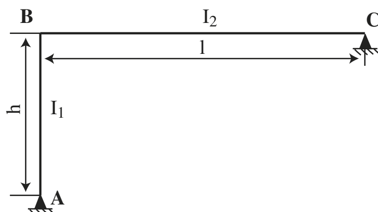
- Lorsque la longueur de la poutre est telle que $l < l_e$, il n'y a pas lieu de tenir compte de la déformation des appuis. La poutre peut alors être calculée comme si elle était infiniment rigide.
- Lorsque la longueur de la poutre est telle que $\lambda l > 5$, on peut considérer les couples (P_A, C_A) et (P_B, C_B) indépendants l'un de l'autre. Chacun peut alors être déterminé en supposant la poutre semi-infinie.

5.6 PORTIQUE

Pour la suite, on définit le paramètre suivant :

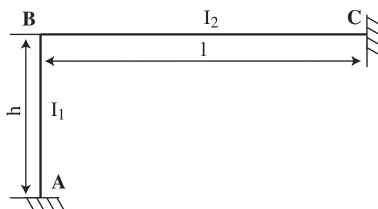
$$k = \frac{I_1}{I_2}\frac{h}{l}$$

5.6.1 Portique à un seul montant et à deux extrémités articulées



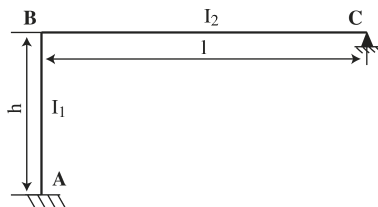
Géométrie et Chargement	Diagramme des moments	Moments
		$M_B = -\dfrac{Pab/l(1+b/l)}{2(1+k)}$ $M_P = (Pa + M_B)\dfrac{b}{l}$
		$M_B = -\dfrac{ql^2}{8(1+k)}$

5.6.2 Portique à un seul montant et à deux extrémités encastrées



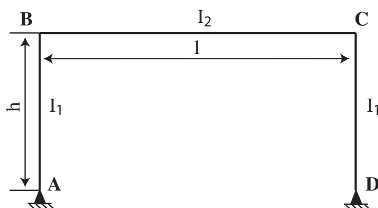
Géométrie et Chargement	Diagramme des moments	Moments
		$M_A = -\dfrac{M_B}{2}$ $M_B = -\dfrac{Pab}{l}\dfrac{b/l}{1+k}$ $M_C = -\dfrac{Pab}{l} \times \dfrac{(2-b/l)k + 2(1-b/l)}{2(1+k)}$ $M_P = \dfrac{Pab}{l} + M_B\dfrac{b}{l} + \left(1 - \dfrac{b}{l}\right) M_C$
		$M_A = -\dfrac{M_B}{2}$ $M_B = -\dfrac{ql^2}{12(1+k)}$ $M_C = -\dfrac{ql^2(3k+2)}{24(1+k)}$

5.6.3 Portique à un seul montant et à une extrémité encastrée et l'autre articulée



Géométrie et Chargement	Diagramme des moments	Moments
B, P, C, a, b, A	M(s), M(s)	$M_A = -\dfrac{Pab}{h} \times \dfrac{3kb/h + 2(1 + b/h)}{4 + 3k}$ $M_B = -\dfrac{Pab}{h} \times \dfrac{3k(1 - b/h)}{4 + 3k}$ $M_P = \dfrac{Pab}{h} + \dfrac{b}{h}M_A + \left(1 - \dfrac{b}{h}\right) M_B$
B, C, P, b, a, A	M(s), M(s)	$M_A = -\dfrac{M_B}{2}$ $M_B = -\dfrac{ql^2}{12(1 + k)}$ $M_C = -\dfrac{ql^2(3k + 2)}{24(1 + k)}$
q, B, C, A	M(s), M(s)	$M_A = -\dfrac{M_B}{2}$ $M_B = -\dfrac{ql^2}{2(4 + 3k)}$
B, C, q, A	M(s), M(s)	$M_A = -\dfrac{qh^2(2 + k)}{4(4 + 3k)}$ $M_B = -\dfrac{qh^2 k}{4(4 + 3k)}$

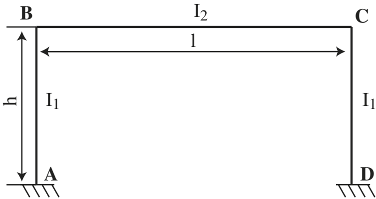
5.6.4 Portique à deux montants articulés



Géométrie et Chargement	Diagramme des moments	Moments
P; B, C; a, b; A, D	M(s)	$M_B = M_C = -\frac{Pab}{l}\frac{3}{2(3+2k)}$ $M_P = \frac{Pab}{l} + M_B$
q; B, C; A, D	M(s)	$M_B = M_C = -\frac{ql^2}{4(3+2k)}$ $M_{max} = \frac{ql^2}{8} + M_B$
P; B, C; A, D	M(s)	$M_B = \frac{Ph}{2}$ $M_C = -\frac{Ph}{2}$

Géométrie et Chargement	Diagramme des moments	Moments
		$M_B = \dfrac{Pa}{2}\left[-\dfrac{k(2-b/h)b/h}{3+2k}+1\right]$ $M_C = \dfrac{Pa}{2}\left[-\dfrac{k(2-b/h)b/h}{3+2k}-1\right]$ $M_P = \left(1-\dfrac{b}{h}\right)(Pb+M_B)$
		$M_B = \dfrac{qh^2}{4}\left(-\dfrac{k}{6+4k}+1\right)$ $M_C = \dfrac{qh^2}{4}\left(-\dfrac{k}{6+4k}-1\right)$

5.6.5 Portique à deux montants encastrés



Géométrie et Chargement	Diagramme des moments	Moments
B P C a b A D	M(s) M(s) M(s)	$M_A = \frac{Pab}{l} \times \left(\frac{1}{2(2+k)} - \frac{2b/l - 1}{2(1+6k)} \right)$ $M_B = -\frac{Pab}{l} \times \left(\frac{1}{2+k} + \frac{2b/l - 1}{2(1+6k)} \right)$ $M_C = -\frac{Pab}{l} \times \left(\frac{1}{2+k} - \frac{2b/l - 1}{2(1+6k)} \right)$ $M_P = \frac{Pab}{l} \times \left(\frac{1}{2(2+k)} + \frac{2b/l - 1}{2(1+6k)} \right)$
P B C A D	M(s) M(s) M(s)	$M_A = -\frac{Ph}{2}\frac{1+3k}{1+6k}$ $M_B = \frac{Ph}{2}\frac{3k}{1+6k}$ $M_C = -M_B$ $M_D = -M_A$
B C b P a A D	M(s) M(s) M(s)	$\alpha_1 = \frac{Pab}{h}\frac{1 + b/h + kb/h}{2(2+k)}$ $\alpha_2 = \frac{Pab}{h}\frac{(1 - b/h)k}{2(2+k)}$ $\alpha_3 = \frac{3Pa(1 - b/h)k}{2(1+6k)}$ $M_A = -\alpha_1 - \frac{Pa}{2} + \alpha_3$ $M_B = -\alpha_2 + \alpha_3$ $M_C = -\alpha_2 - \alpha_3$ $M_D = -\alpha_1 + \frac{Pa}{2} - \alpha_3$

Géométrie et Chargement	Diagramme des moments	Moments
		$M_A = M_D = \dfrac{ql^2}{12(2+k)}$ $M_B = M_C = -\dfrac{ql^2}{6(2+k)}$
		$M_A = \dfrac{qh^2}{4}\left[-\dfrac{3+k}{6(2+k)} - \dfrac{1+4k}{1+6k}\right]$ $M_B = \dfrac{qh^2}{4}\left[-\dfrac{k}{6(2+k)} + \dfrac{2k}{1+6k}\right]$ $M_C = \dfrac{qh^2}{4}\left[-\dfrac{k}{6(2+k)} - \dfrac{2k}{1+6k}\right]$ $M_D = -M_A$

5.7 ARCS HYPERSTATIQUES

5.7.1 Arc circulaire à deux articulations sans tirant

Soit l'arc circulaire hyperstatique de la figure 5.29. La géométrie de l'arc est un cercle de centre O et de rayon R. Nous avons également les données suivantes :

– E : module d'élasticité du matériau de l'arc,
– I : moment d'inertie d'une section d'arc (considéré comme constant),
– S : aire d'une section d'arc (considérée comme constante),
– G : module de cisaillement du matériau de l'arc.

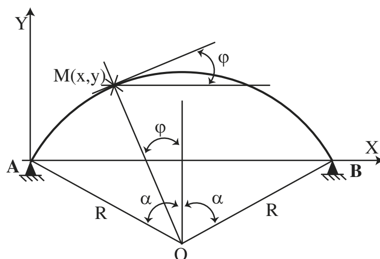


Figure 5.29 Arc circulaire bi-articulé

Géométrie et Chargement	**Efforts et moment de flexion**
	$\Upsilon = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{SR^2} \times \frac{4\alpha}{2\alpha - 3\sin 2\alpha + 4\alpha\cos^2\alpha}}$ $X_A = X_B = \dfrac{qR}{2} \times \dfrac{(9 - 4\alpha^2)\sin 2\alpha - 10\alpha\cos 2\alpha - 8\alpha}{2\alpha - 3\sin 2\alpha + 4\alpha\cos^2\alpha}\Upsilon$ $N(\varphi) = qR\varphi\sin\varphi + X_A\cos\varphi$ $M(\varphi) = qR^2(\alpha\sin\alpha - \varphi\sin\varphi + \cos\alpha - \cos\varphi) - X_A R(\cos\varphi - \cos\alpha)$ $V(\varphi) = -qR\varphi\cos\varphi + X_A\sin\varphi$
	$X_A = -X_B = -qR\alpha$ $N(\varphi) = qR(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi - \alpha\cot\alpha\sin\varphi)$ $M(\varphi) = qR^2(\alpha\cot\alpha\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$ $V(\varphi) = qR(\alpha\cot\alpha\cos\varphi + \varphi\sin\varphi - \cos\varphi)$

5.7.2 Arc parabolique à deux articulations sans tirant

Soit l'arc parabolique hyperstatique de la figure 5.30. Nous avons les données suivantes :

- E : module d'élasticité du matériau de l'arc
- I : moment d'inertie d'une section d'arc (considéré comme constant)
- S : aire d'une section d'arc (considérée comme constante)
- G : module de cisaillement du matériau de l'arc

Les équations de la parabole sont les suivantes :

$$y = \frac{4h}{L^2}\,x(L-x)$$
$$\tan\varphi = \frac{4h}{L}\left(1-\frac{2x}{L}\right) \qquad (5.49)$$
$$\tan\theta = \frac{4h}{L}$$

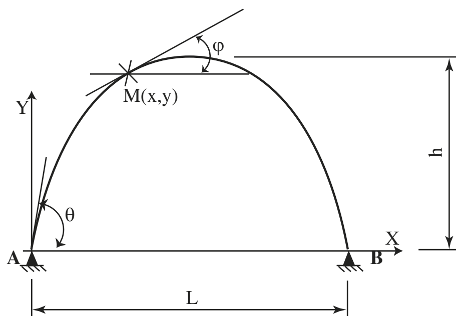


Figure 5.30 Arc parabolique bi-articulé

Géométrie et Chargement	Efforts et moment de flexion
q Y X A B	$X_A = X_B = \dfrac{qL^2}{8h(1 + 15I/8Sh^2)}$ $Y_A = Y_B = \dfrac{qL}{2}\cos\theta - X_A \sin\theta$ $N(\varphi) = q\left(\dfrac{L}{2} - x\right)\sin\varphi + X_A\cos\varphi$ $M(\varphi) = \dfrac{qx(L-x)}{2} - X_A y$
q C Y X A B	$X_A = X_B = \dfrac{qL^2}{16h(1 + 15I/8Sh^2)}$ $Y_A = q\left(\dfrac{3L}{8} - x\right)\cos\theta - X_A\sin\theta$ $Y_B = -\dfrac{qL}{8}\cos\theta - X_A\sin\theta$ $N_{AC}(\varphi) = q\left(\dfrac{3L}{8} - x\right)\sin\varphi + X_A\cos\varphi$ $N_{CB}(\varphi) = -\dfrac{qL}{8}\sin\varphi + X_A\cos\varphi$ $M_{AC}(\varphi) = \dfrac{qx}{2}\left(\dfrac{3L}{4} - x\right) - X_A y$ $M_{CB}(\varphi) = \dfrac{qx}{8}(L-x) - X_A y$

Chapitre 6

Plaques et coques

6.1 PLAQUES

Une plaque est un élément prismatique d'épaisseur h petite devant les deux autres directions de l'espace. Le plan moyen sera le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$, le déplacement transverse étant la direction $\vec{z}$. On supposera dans la suite l'hypothèse des petits déplacements vérifiée.

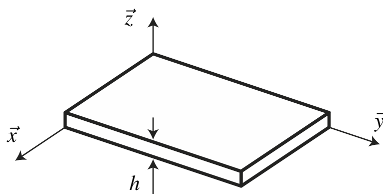


Figure 6.1

6.1.1 Formules générales

On appelle $v(x, y)$ la flèche de la plaque (suivant l'axe $\vec{z}$). Les solutions sont données pour des plaques élastiques de Kirchhoff-Love, valables pour les plaques minces. La flèche vérifie l'équation :

$$D\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4}\right) = q(x, y) \tag{6.1}$$

avec $q(x, y)$ la densité de charge et D la raideur en flexion de la plaque :

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1 - \nu^2\right)}$$

où E et ν sont les paramètres élastiques du matériau, respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson.

➤ Contraintes généralisées

Moments de flexion :

$$M_x = D\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad M_y = D\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = D(1 - \nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Efforts tranchants :

$$V_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \qquad V_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

➤ Contraintes

Contraintes normales :

$$\sigma_x(z) = \frac{12M_x}{e^3}z \qquad \sigma_y(z) = \frac{12M_y}{e^3}z$$

Contraintes de cisaillement :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{12M_{xy}}{e^3} z$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{6V_x}{e^3} \left(\frac{e^2}{4} - v^2 \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{6V_y}{e^3} \left(\frac{e^2}{4} - v^2 \right)$$

6.1.2 Méthode de résolution pour les plaques rectangulaires

On considère une plaque rectangulaire de dimension $a \times b$, avec $a \leq b$. La méthode de résolution se base sur la solution analytique associée au chargement réparti de la forme :

$$q(x, y) = q_0 \sin \left(m \frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(n \frac{\pi y}{b} \right)$$

La solution pour tout type de charge peut alors être obtenue en décomposant celle-ci sous la somme :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \left(m \frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(n \frac{\pi y}{b} \right)$$

La flèche $v(x, y)$ solution de l'équation (6.1) s'écrit alors :

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \left(m \frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(n \frac{\pi y}{b} \right)$$

Les coefficients A_{mn} sont déterminés en fonction des conditions aux limites.

6.1.3 Plaques rectangulaires

a) Simplement appuyées sur les quatre côtés

➤ Charge ponctuelle au centre de la plaque

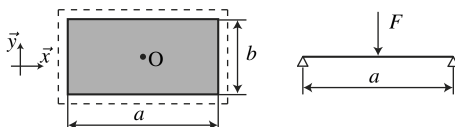


Figure 6.2

Flèche maxi (point O)	Moment maxi (point O)
$\alpha \dfrac{Fb^2}{Eh^3}$	$\beta \dfrac{F}{e^2}$

a/b	**1.0**	**1.2**	**1.4**	**1.6**	**1.8**	**2.0**	**∞**
α	0,126 5	0,147 8	0,162 1	0,171 4	0,176 9	0,180 3	0,184 9
β	0,149 2	0,210 1	0,261 6	0,306 2	0,345 6	0,380 8	0,420 5

➤ Charge uniformément répartie

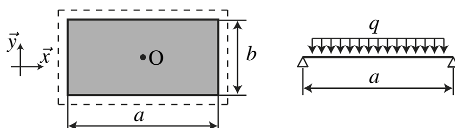


Figure 6.3

Flèche maxi (point O)	Moment maxi (point O)
$\alpha \dfrac{qb^4}{Eh^3}$	βqb^2

a/b	**1.0**	**1.2**	**1.4**	**1.6**	**1.8**	**2.0**	**∞**
α	0,044 3	0,061 6	0,077 0	0,090 6	0,101 7	0,110 6	0,142 2
β	0,047 9	0,062 6	0,075 3	0,086 2	0,094 8	0,101 7	0,125 0

b) Encastrées sur les quatre côtés

➤ Charge ponctuelle au centre de la plaque

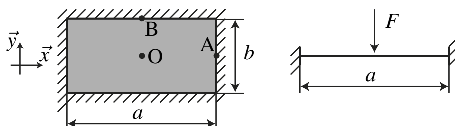


Figure 6.4

Flèche maxi (point O)	Moment maxi (point B)
$\alpha \dfrac{Fb^2}{Eh^3}$	$\beta \dfrac{F}{e^2}$

a/b	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	∞
α	0,061 1	0,070 6	0,075 5	0,077 7	0,078 6	0,078 8	0,079 2
β	−0,125 7	−0,149 0	−0,160 4	−0,165 1	−0,166 7	−0,167 4	−0,168 0

➤ Charge uniformément répartie

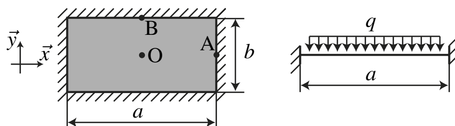


Figure 6.5

Flèche maxi (point O)	Moment maxi (point B)
$\alpha \dfrac{qb^4}{Eh^3}$	βqb^2

a/b	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	∞
α	0,013 8	0,018 8	0,022 6	0,025 1	0,026 7	0,027 7	0,028 4
β	−0,051 3	−0,063 9	−0,072 6	−0,078 0	−0,081 2	−0,082 9	−0,083 3

6.1.4 Plaques circulaires

a) Bord simplement appuyé

➤ **Charge ponctuelle *P* au centre de la plaque**

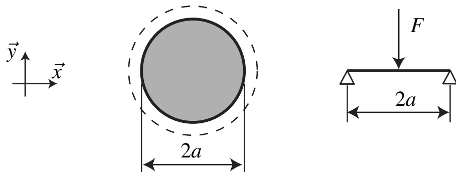


Figure 6.6

Contraintes :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{3P}{2\pi e^2}(1+\nu)\ln\frac{a}{r}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3P}{2\pi e^2}\left((1-\nu)+(1+\nu)\ln\frac{a}{r}\right)$$

Flèches :

$$v(r) = \frac{P}{16eD}\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}\left(a^2-r^2\right)+2r^2\ln\frac{r}{a}\right)$$

$$v_{\max} = \frac{3Pa^2(3+\nu)(1-\nu)}{4Ee^4(1+\nu)}$$

➤ **Charge uniformément répartie *q* sur la plaque**

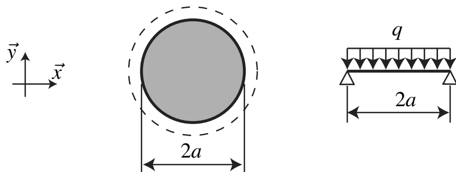


Figure 6.7

Contraintes :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{3q}{8e^2}(3+\nu)\left(a^2 - r^2\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3q}{8e^2}\left((3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2\right)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{rr}(0) = \sigma_{\theta\theta}(0) = \frac{3q}{8e^2}(3+\nu)a^2$$

Flèches :

$$v(r) = \frac{q}{64D}\left(a^2 - r^2\right)\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2 - r^2\right)$$

$$v_{\max} = \frac{q}{64D}a^2\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2\right)$$

➤ Charge sur la circonférence d'un cercle concentrique de rayon *c*

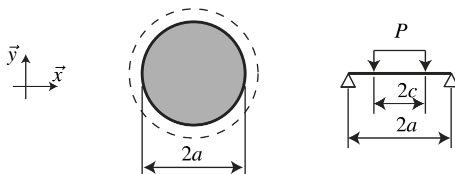


Figure 6.8

Contraintes :

$$\text{si } r < c, \quad \sigma_{rr}(r) = \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3P}{4\pi e^2}\left((1-\nu)\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) - 2(1+\nu)\ln\frac{c}{a}\right)$$

$$\text{si } c \leqslant r \leqslant a, \quad \sigma_{rr}(r) = \frac{3P}{4\pi e^2}\left((1-\nu)\left(\frac{c^2}{r^2} - \frac{c^2}{a^2}\right) - 2(1+\nu)\ln\frac{r}{a}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3P}{4\pi e^2}\left((1-\nu)\left(2 - \frac{c^2}{r^2} - \frac{c^2}{a^2}\right) - 2(1+\nu)\ln\frac{r}{a}\right)$$

Flèches :

$$\text{si } r < c, \quad v(r) = \frac{P}{8\pi D}\left(\left(a^2 - c^2\right)\frac{(3+\nu)a^2 - (1-\nu)r^2}{2(1+\nu)a^2} + \left(r^2 + c^2\right)\ln\frac{c}{a}\right)$$

$$\text{si } c \leqslant r \leqslant a,$$

$$v(r) = \frac{P}{8\pi D}\left(\left(a^2 - r^2\right)\left(1 + \frac{1-\nu}{2(1+\nu)}\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) + \left(r^2 + c^2\right)\ln\frac{r}{a}\right)$$

$$v_{\max} = \frac{P}{8\pi D}\left(\left(a^2 - c^2\right)\frac{(3+\nu)}{2(1+\nu)} + c^2\ln\frac{c}{a}\right)$$

➤ **Charge uniformément répartie à l'intérieur d'un cercle de rayon *c***

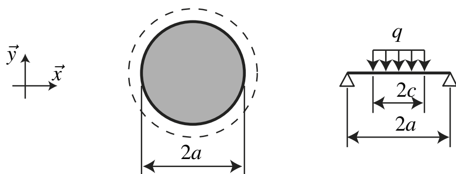


Figure 6.9

Contraintes :

$$\text{si } r < c, \quad \sigma_{rr}(r) = \frac{3qc^2}{8e^2}\left(4 - (1-\nu)\frac{c^2}{a^2} - (3+\nu)\frac{r^2}{c^2} - 4(1+\nu)\ln\frac{c}{a}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3qc^2}{8e^2}\left(4 - (1-\nu)\frac{c^2}{a^2} - (1+3\nu)\frac{r^2}{c^2} - 4(1+\nu)\ln\frac{c}{a}\right)$$

$$\text{si } c \leqslant r \leqslant a, \quad \sigma_{rr}(r) = \frac{3qc^2}{8e^2}\left((1-\nu)\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\frac{c^2}{a^2} - 4(1+\nu)\ln\frac{e}{a}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3qc^2}{8e^2}\left((1-\nu)\left(4 - \left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)\frac{c^2}{a^2}\right) - 4(1+\nu)\ln\frac{e}{a}\right)$$

Flèches :

$$\text{si } r < c,$$

$$v(r) = \frac{qc^2}{16D}\left(\frac{r^4}{4c^2} - \frac{4a^2r^2 - (1-\nu)c^2r^2}{2(1+\nu)a^2} + \frac{4(3+\nu)a^2 - (7+3\nu)c^2}{4(1+\nu)} + \left(c^2 + 2r^2\right)\ln\frac{c}{a}\right)$$

$$\text{si } c \leqslant r \leqslant a,$$

$$v(r) = \frac{qc^2}{16D}\left(\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}a^2 - \frac{1-\nu}{2(1+\nu)}c^2\right) + \left(c^2 + 2r^2\right)\ln\frac{r}{a}\right)$$

b) Bord encastré

➤ Charge ponctuelle *P* au centre de la plaque

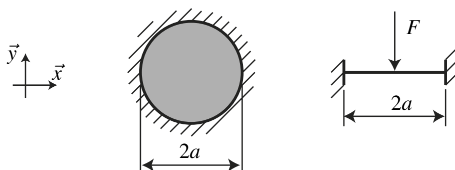


Figure 6.10

Contraintes :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{3P}{2\pi e^2}\left((1+\nu)\ln\frac{a}{r} - 1\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3P}{2\pi e^2}\left((1+\nu)\ln\frac{a}{r} - \nu\right)$$

Flèches :

$$v(r) = \frac{P}{16eD}\left(a^2 - r^2 + 2r^2\ln\frac{r}{a}\right)$$

$$v_{\max} = \frac{3Pa^2(1-\nu)}{4Ee^4}$$

➤ Charge uniformément répartie *q* sur la plaque

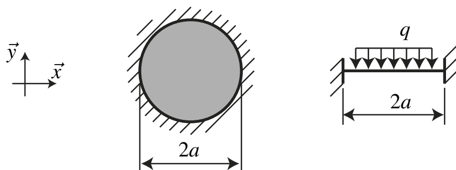


Figure 6.11

Contraintes :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{3q}{8e^2}\left((1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3q}{8e^2}\left((1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2\right)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{rr}(0) = \sigma_{\theta\theta}(0) = \frac{3q}{8e^2}(1+\nu)a^2$$

Flèches :

$$v(r) = \frac{q}{64D}\left(a^2 - r^2\right)^2$$

$$v_{\max} = \frac{qa^4}{64D}$$

➤ Charge sur la circonférence d'un cercle concentrique de rayon *c*

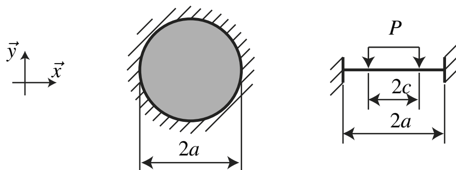


Figure 6.12

Contraintes :

$$\text{si } r < c, \quad \sigma_{rr}(r) = \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3P}{4\pi e^2}(1+\nu)\left(\frac{c^2}{a^2} - 2\ln\frac{c}{a} - 1\right)$$

$$\text{si } c \leqslant r \leqslant a, \quad \sigma_{rr}(r) = \frac{3P}{4\pi e^2}\left((1-\nu)\frac{c^2}{r^2} - 2 + (1+\nu)\left(\frac{c^2}{a^2} - 2\ln\frac{r}{a}\right)\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3P}{4\pi e^2}\left(-(1-\nu)\frac{c^2}{r^2} - 2\nu + (1+\nu)\left(\frac{c^2}{a^2} - 2\ln\frac{r}{a}\right)\right)$$

Flèches :

$$\text{si } r < c, \quad v(r) = \frac{P}{8\pi D}\left(\frac{1}{2}\left(a^2 - c^2\right)\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) + \left(c^2 + r^2\right)\ln\frac{c}{a}\right)$$

$$\text{si } c \leqslant r \leqslant a,$$

$$v(r) = \frac{P}{8\pi D}\left(a^2 + \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2\right)\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + \left(c^2 + r^2\right)\ln\frac{r}{a}\right)$$

➤ Charge uniformément répartie à l'intérieur d'un cercle de rayon *c*

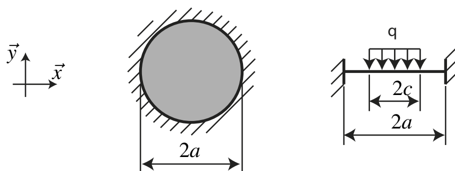


Figure 6.13

Contraintes :

$$\text{si } r < c, \quad \sigma_{rr}(r) = \frac{3qc^2}{8e^2}\left(-(3+\nu)\frac{r^2}{c^2} + (1+\nu)\left(\frac{c^2}{a^2} - 4\ln\frac{c}{a}\right)\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3qc^2}{8e^2}\left(-(1+3\nu)\frac{r^2}{c^2} + (1+\nu)\left(\frac{c^2}{a^2} - 4\ln\frac{c}{a}\right)\right)$$

$$\text{si } c \leqslant r \leqslant a, \quad \sigma_{rr}(r) = \frac{3qc^2}{8e^2}\left(2\frac{c^2}{a^2} - 4 - 4(1+\nu)\ln\frac{r}{a}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3qc^2}{8e^2}\left(2\nu\frac{c^2}{a^2} - 4\nu - 4(1+\nu)\ln\frac{r}{a}\right)$$

Flèches :

$$\text{si } r < c, \quad v(r) = \frac{qc^2}{16D}\left(\frac{r^4}{4c^2} - \frac{r^2c^2}{2a^2} + a^2 - \frac{3}{4}b^2 + \left(c^2 + 2r^2\right)\ln\frac{b}{a}\right)$$

$$\text{si } c \leqslant r \leqslant a, \quad v(r) = \frac{qc^2}{16D}\left(a^2 - r^2 - \frac{r^2c^2}{2a^2} + \frac{1}{2}b^2 + \left(c^2 + 2r^2\right)\ln\frac{r}{a}\right)$$

6.1.5 Plaques annulaires

a) Bord extérieur simplement appuyé

➤ **Charge uniformément répartie *q* sur la plaque**

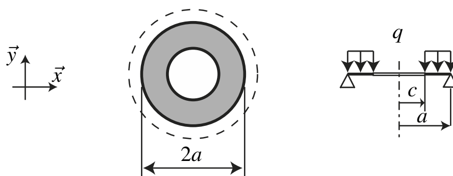


Figure 6.14

Contraintes :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{3qa^2}{8e^2}\left((1-\nu)\left(\frac{2c^2}{a^2} + B\frac{a^2}{r^2}\right) - (3+\nu)\frac{r^2}{c^2}\right.$$
$$\left. -4(1+\nu)\left(A - \ln\frac{r}{a}\right)\frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -\frac{3qa^2}{8e^2}\left((1-\nu)\left(\frac{2c^2}{a^2}+B\frac{a^2}{r^2}\right)+(1+3\nu)\frac{r^2}{c^2}\right.$$
$$\left.+4(1+\nu)\left(A-\ln\frac{r}{a}\right)\frac{c^2}{a^2}\right)$$

Flèche :

$$v(r) = \frac{q}{64D}\left(r^4-c^4-8(A+1)\left(a^2-r^2\right)c^2+4\left(Ba^4-2b^2r^2\right)\ln\frac{r}{a}\right)$$

Constantes :

$$A = \frac{c^2}{a^2-c^2}\ln\frac{a}{c}-\frac{1}{4(1+\nu)}\left((1+3\nu)+(3+\nu)\frac{a^2}{c^2}\right)$$

$$B = -\frac{1}{1-\nu}\left(4(1+\nu)\frac{c^2}{a^2-c^2}\ln\frac{c}{a}+(3+\nu)\right)\frac{a^2}{c^2}$$

➤ Charge *P* sur le bord intérieur

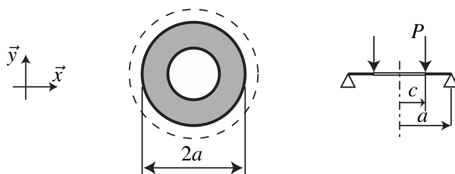


Figure 6.15

Contraintes :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{3P}{4\pi D}\left(2(1+\nu)\left(A-\ln\frac{r}{a}\right)-(1-\nu)\left(1-B\frac{a^2}{r^2}\right)\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3P}{4\pi D}\left(2(1+\nu)\left(A-\ln\frac{r}{a}\right)+(1-\nu)\left(1-B\frac{a^2}{r^2}\right)\right)$$

Flèche :

$$v(r) = \frac{P}{8\pi D}\left((1+A)\left(a^2 - r^2\right) + \left(Ba^2 + r^2\right)\ln\frac{r}{a}\right)$$

Constantes :

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right) + \left(\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)\ln\frac{a}{c}$$

$$B = -\frac{1}{2}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left(\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)\ln\frac{a}{c}$$

b) Bord extérieur encastré

➤ Charge uniformément répartie *q* sur la plaque

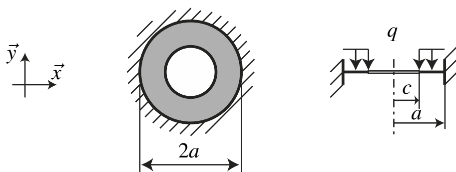


Figure 6.16

Contraintes :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{3qa^2}{8e^2}\left((1-\nu)\left(\frac{2c^2}{a^2} + B\frac{a^2}{r^2}\right) - (3+\nu)\frac{r^2}{c^2} \right.$$
$$\left. -4(1+\nu)\left(A - \ln\frac{r}{a}\right)\frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -\frac{3qa^2}{8e^2}\left((1-\nu)\left(\frac{2c^2}{a^2} + B\frac{a^2}{r^2}\right) + (1+3\nu)\frac{r^2}{c^2} \right.$$
$$\left. +4(1+\nu)\left(A - \ln\frac{r}{a}\right)\frac{c^2}{a^2}\right)$$

Flèche :

$$v(r) = \frac{q}{64D}\left(r^4 - c^4 - 8(A+1)\left(a^2 - r^2\right)c^2 + 4\left(Ba^4 - 2b^2r^2\right)\ln\frac{r}{a}\right)$$

Constantes :

$$A = -\frac{1}{4}\frac{a^2}{(1-\nu)a^2 + (1+\nu)c^2}\left((1-\nu)\left(2+\frac{a^2}{c^2}\right)\right.$$
$$\left. + \left(1 + 3\nu - 4(1+\nu)\ln\frac{a}{a}\right)\frac{a^2}{c^2}\right)$$

$$B = -\frac{c^2}{(1-\nu)a^2 + (1+\nu)c^2}\left((1-\nu)\left(1 + 4\frac{c^2}{a^2}\ln\frac{c}{a}\right) + (1-\nu)\frac{c^2}{a^2}\right)$$

➤ **Charge *P* sur le bord intérieur**

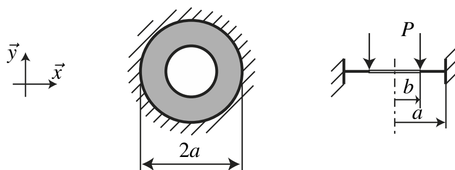


Figure 6.17

Contraintes :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{3P}{4\pi D}\left(2(1+\nu)\left(A - \ln\frac{r}{a}\right) - (1-\nu)\left(1 - B\frac{a^2}{r^2}\right)\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{3P}{4\pi D}\left(2(1+\nu)\left(A - \ln\frac{r}{a}\right) + (1-\nu)\left(1 - B\frac{a^2}{r^2}\right)\right)$$

Flèche :

$$v(r) = \frac{P}{8\pi D}\left((1+A)\left(a^2 - r^2\right) + \left(Ba^2 + r^2\right)\ln\frac{r}{a}\right)$$

Constantes :

$$A = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{(1-\nu)a^2+(1+\nu)c^2}\left((1-\nu)\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)-2(1+\nu)\frac{c^2}{a^2}\ln\frac{c}{a}\right)$$

$$B = \frac{2b^2}{(1-\nu)a^2+(1+\nu)c^2}\left(1+(1+\nu)\ln\frac{c}{a}\right)$$

c) Bord intérieur simplement appuyé

➤ Charge uniformément répartie *q* sur la plaque

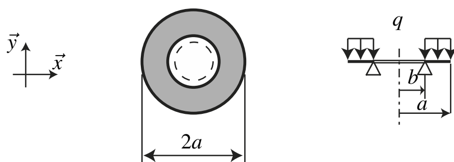


Figure 6.18

Contraintes :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{3qa^2}{8e^2}\left((1-\nu)\left(2-B\frac{a^2}{r^2}\right)-(3+\nu)\frac{r^2}{c^2}-4(1+\nu)\left(A-\ln\frac{r}{a}\right)\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -\frac{3qa^2}{8e^2}\left((1-\nu)\left(2-B\frac{a^2}{r^2}\right)+(1+3\nu)\frac{r^2}{c^2}+4(1+\nu)\left(A-\ln\frac{r}{a}\right)\right)$$

Flèche :

$$v(r) = \frac{q}{64D}\left(\left(r^2-c^2\right)\left(r^2+c^2+8a^2\left(1+A-\ln\frac{r}{a}\right)\right)\right.$$
$$\left.+4\left(Ba^4+2b^2a^2\right)\ln\frac{r}{a}\right)$$

Constantes :

$$A = \frac{c^2}{a^2-c^2}\ln\frac{a}{c}-\frac{1}{4(1+\nu)}\left((1+3\nu)+(3+\nu)\frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$B = \frac{1}{1+\nu}\left(4(1+\nu)\frac{c^2}{a^2-c^2}\ln\frac{c}{a} + (3+\nu)\frac{c^2}{a^2}\right)$$

d) Bord intérieur encastré

➤ Charge uniformément répartie *q* sur la plaque

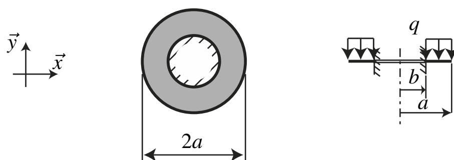


Figure 6.19

Contraintes :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{3qa^2}{8e^2}\left((1-\nu)\left(2 - B\frac{a^2}{r^2}\right) - (3+\nu)\frac{r^2}{c^2} - 4(1+\nu)\left(A - \ln\frac{r}{a}\right)\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -\frac{3qa^2}{8e^2}\left((1-\nu)\left(2 - B\frac{a^2}{r^2}\right) + (1+3\nu)\frac{r^2}{c^2} + 4(1+\nu)\left(A - \ln\frac{r}{a}\right)\right)$$

Flèche :

$$v(r) = \frac{q}{64D}\left(\left(r^2 - c^2\right)\left(r^2 + c^2 + 8a^2\left(1 + A - \ln\frac{r}{a}\right)\right) + 4\left(Ba^4 + 2b^2a^2\right)\ln\frac{r}{a}\right)$$

Constantes :

$$A = -\frac{1}{4}\frac{a^2}{(1+\nu)a^2 + (1-\nu)c^2}\left(1 + 3\nu + (1-\nu)\left(2 + \frac{c^2}{a^2} - 4\ln\frac{c}{a}\right)\frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$B = \frac{c^2}{(1+\nu)a^2 + (1-\nu)c^2}\left(1 - \nu + (1+\nu)\left(\frac{c^2}{a^2} - 4\ln\frac{c}{a}\right)\right)$$

6.2 COQUES

6.2.1 Cylindriques verticaux

σ_z : contrainte suivant l'axe du cylindre
σ_θ : contrainte perpendiculaire à l'axe du cylindre
δ : déformation radiale

a) Pression interne uniforme

➤ Extrémités fermées

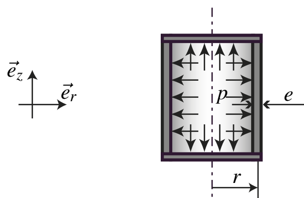


Figure 6.20

$\sigma_z = \dfrac{p\,r}{2e}$	$\sigma_\theta = \dfrac{p\,r}{e}$	$\delta = \dfrac{p\,r^2}{2Ee}(2-\nu)$

➤ Extrémités ouvertes

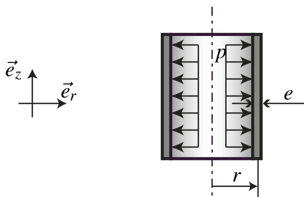


Figure 6.21

$\sigma_z = 0$	$\sigma_\theta = \dfrac{p\,r}{e}$	$\delta = \dfrac{p\,r^2}{Ee}$

b) Pression interne linéaire

$$p(z) = p_0 \frac{z}{L}$$

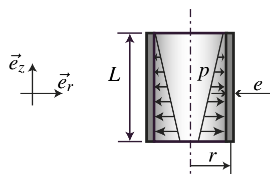


Figure 6.22

$\sigma_z = 0$	$\sigma_\theta = \dfrac{p_0\, r\, z}{eL}$	$\delta = \dfrac{p_0\, r^2\, z}{EeL}$

c) Pression externe due au vent

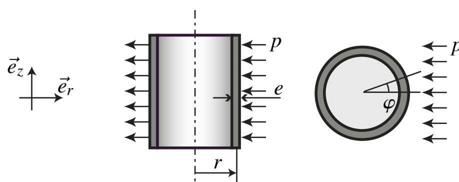


Figure 6.23

$\sigma_z = p\dfrac{d^2}{2r}\cos\varphi$	$\sigma_\theta = -pr\sin\varphi$

6.2.2 Cylindres horizontaux remplis par un liquide

ρ : densité du liquide
g : accélération de la pesanteur
$p_0 = \rho g 2r$: pression maximale

a) Extrémités simplement appuyées

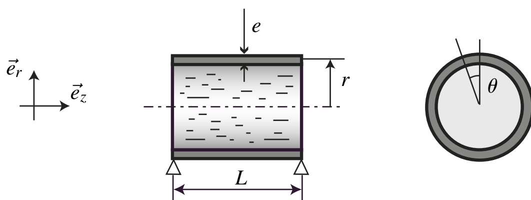


Figure 6.24

$\sigma_z = -\dfrac{\rho\, g}{2e} z(L - z)\cos\theta$	$\sigma_\theta = \dfrac{\rho g}{e}\left(p_0 r - \rho\, g\, r^2 \cos\theta\right)$

b) Extrémités encastrées

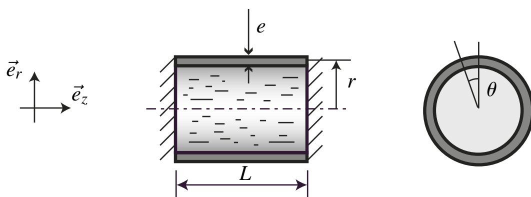


Figure 6.25

$\sigma_z = -\dfrac{\rho\, g}{2e} z(L - z)\cos\theta + \dfrac{\nu\, p_0 a}{e} + \left(\dfrac{e}{12} - \nu r^2\right)\dfrac{\rho\, g}{e}\cos\theta$	$\sigma_\theta = \dfrac{1}{e}\left(p_0 r - \rho\, g\, r^2 \cos\theta\right)$

6.2.3 Coupole sphérique fermée

e : épaisseur de la coupole
r : rayon

a) Charge *p* uniforme (poids propre)

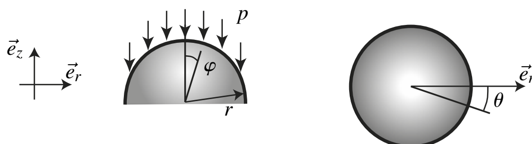


Figure 6.26

$\sigma_\varphi = \dfrac{pr}{e(1+\cos\varphi)}$	$\sigma_\theta = \dfrac{pr}{e}\left(\cos\varphi - \dfrac{1}{1+\cos\varphi}\right)$

b) Charge *p* uniforme par unité de surface projetée (neige)

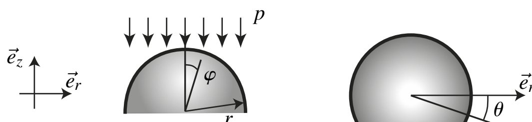


Figure 6.27

$\sigma_\varphi = \dfrac{pr}{2e}$	$\sigma_\theta = \dfrac{pr}{2e}\cos(2\varphi)$

c) Pression *p* extérieure

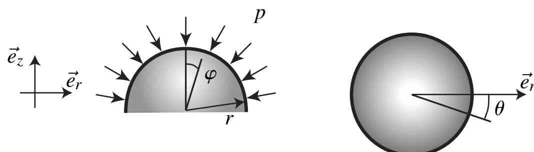


Figure 6.28

$\sigma_\varphi = \dfrac{pr}{2e}$	$\sigma_\theta = \dfrac{pr}{2e}$

d) Charge *P* au sommet

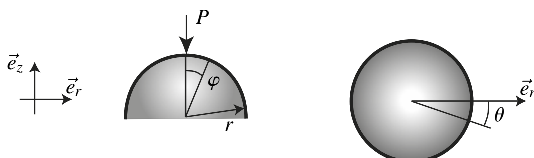


Figure 6.29

$\sigma_\varphi = \dfrac{-P}{2e\pi r \sin^2 \varphi}$	$\sigma_\theta = \dfrac{-P}{2e\pi r \sin^2 \varphi}$

6.2.4 Coupole sphérique ouverte

e : épaisseur de la coupole
r : rayon
φ_0 : angle d'ouverture de la coupole

a) Charge *p* uniforme (poids propre)

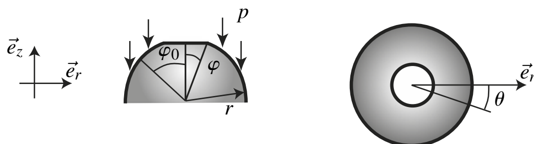


Figure 6.30

$\sigma_\varphi = \dfrac{pr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{e\sin^2\varphi)}$	$\sigma_\theta = \dfrac{pr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{e\sin^2\varphi)} - \cos\varphi$

b) Charge *p* uniforme par unité de surface projetée (neige)

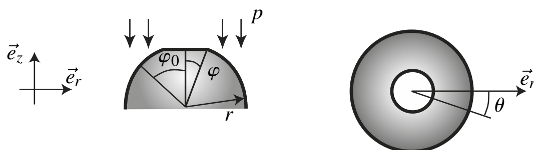


Figure 6.31

$\sigma_\varphi = \dfrac{pr}{2e}\left(1 - \dfrac{\sin^2\varphi_0}{\sin^2\varphi}\right)$	$\sigma_\theta = \dfrac{pr}{2e}\left(1 - \dfrac{\sin^2\varphi_0}{\sin^2\varphi} - 2\cos^2\varphi\right)$

c) Pression p extérieure

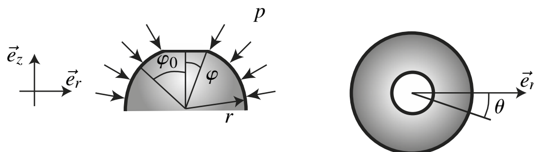


Figure 6.32

$$\sigma_\varphi = \frac{pr}{2e}\left(1 - \frac{\sin^2\varphi_0}{\sin^2\varphi}\right)$$	$$\sigma_\theta = \frac{pr}{2e}\left(1 + \frac{\sin^2\varphi_0}{\sin^2\varphi}\right)$$

d) Charge P en bordure du sommet

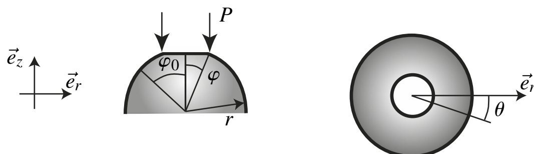


Figure 6.33

$$\sigma_\varphi = -\frac{P}{e}\,\frac{\sin\varphi_0}{\sin^2\varphi}$$	$$\sigma_\theta = \frac{P}{e}\,\frac{\sin\varphi_0}{\sin^2\varphi}$$

6.2.5 Coque sphérique

e : épaisseur de la coque
r : rayon

a) Pression interne p

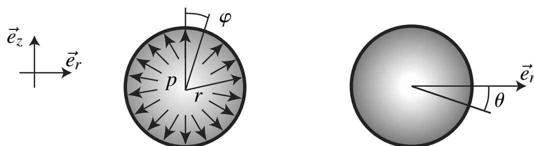


Figure 6.34

$\sigma_r = \dfrac{p\,r}{2e}$	$\sigma_\theta = -\dfrac{p\,r}{2e}$	$\delta = \dfrac{p\,r^2}{2Ee}(1-\nu)$

b) Pression interne p_1 et pression externe p_2

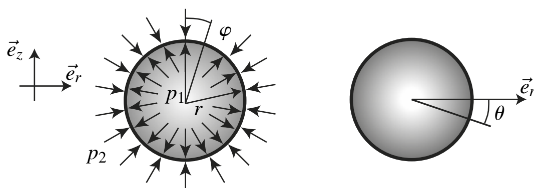


Figure 6.35

$\sigma_r = \dfrac{r_2^3 p_2 + r_1^3 p_1}{2\left(r_1^3 - r_2^3\right)} - \dfrac{p_2 - p_1}{r_1^3 - r_2^3}$	$\sigma_\theta = \dfrac{r_2^3 p_2 + r_1^3 p_1}{2\left(r_1^3 - r_2^3\right)} + \dfrac{p_2 - p_1}{r_1^3 - r_2^3}$

Chapitre 7

Formulation des éléments finis

7.1 INTRODUCTION

La méthode des éléments finis permet de résoudre un problème dont la solution analytique ne peut éventuellement pas être déterminée. Elle fournit une solution approchée de la solution exacte. Le milieu étudié est *discrétisé* en plusieurs éléments reliés entre eux par des *nœuds*. La géométrie d'un élément est caractérisée par un nombre fini de nœuds sur son périmètre. La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis consiste à trouver les *déplacements* (par exemple les translations et les rotations) de ces nœuds. Le champ de déplacement en tout point est déterminé par *interpolation* entre les valeurs déterminées aux nœuds. L'interpolation est basée sur l'utilisation de *fonctions de formes*.

7.2 PRINCIPE DES ÉLÉMENTS FINIS

Pour un problème de mécanique en élasticité, le principe des travaux virtuels s'écrit en un point M d'un domaine Ω chargé par des efforts volumiques $\vec{f}$

et des efforts $\vec{F}$ sur une partie du bord $\partial\Omega$.

$$\int_{\Omega} \vec{f}(M).\vec{u}(M)dV + \int_{\partial\Omega} \vec{F}(M).\vec{u}^*(M)dS - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* dV = 0$$

pour le champ de déplacement u^*. La structure étudiée est discrétisée en un ensemble d'éléments : le maillage. Chaque élément possède n nœuds. La résolution du problème se base sur l'interpolation du champ de déplacement de chaque élément suivant la forme :

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(M) \\ v(M) \\ w(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \cdots & \varphi_{1(3n)} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \cdots & \varphi_{2(3n)} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \cdots & \varphi_{3(3n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = [\varphi]\,[u]$$

Les fonctions φ_{ij} sont les fonctions de forme. Le tenseur de déformation s'obtient par les équations de la cinématique pour s'écrire sous la forme :

$$\left[\varepsilon(\vec{u}(M))\right] = [\delta]\,[u] \tag{7.1}$$

où $[\delta]$ désigne la matrice des dérivées des fonctions de forme.

Enfin, le tenseur des contraintes s'obtient grâce à la loi de comportement sous la forme :

$$[\sigma] = [E]\,[\delta]\,[u] \tag{7.2}$$

Pour un matériau élastique isotrope de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν,

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Finalement, le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\left(\int_{\Omega} \left[f_{\text{int}}\right][\varphi]\, dV + \int_{\partial\Omega} \left[F_{\text{ext}}\right][\varphi]\, dS\right)[u] - [u]^t \left(\int_{\Omega} [\delta]^t\, [E]\, [\delta]\, dV\right)[u] = 0$$

En considérant que ce principe doit être vérifié pour tout $[u]$ et en introduisant la matrice de raideur :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} [\delta]^t\, [E]\, [\delta]\, dV \qquad (7.3)$$

et le vecteur des efforts :

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \left[f_{\text{int}}\right][\varphi]\, dV + \int_{\partial\Omega} \left[F_{\text{ext}}\right][\varphi]\, dS \qquad (7.4)$$

le principe des travaux virtuels se réduit au système :

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}$$

Le problème est résolu par inversion du système. A partir du champ de déplacement, le champ de déformation est calculé avec la relation (7.1), puis le champ de contrainte est calculé avec la relation (7.2).

7.3 ÉTAPES DE LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME

1. Définition de la géométrie de la structure étudiée
2. Maillage de la structure (discrétisation en éléments) - Génération de la table de connectivité entre les éléments
3. Définition du modèle associé à la structure
4. Choix des paramètres du modèle (deux pour un matériau élastique isotrope)

5. Construction de la matrice de raideur globale par assemblage des matrices de raideur locales des éléments en fonction de la table de connectivité
6. Construction du vecteur effort global par assemblage des vecteurs d'effort locaux suivant la table de connectivité
7. Prise en compte des conditions aux limites
8. Prise en compte du chargement
9. Résolution du système pour obtenir les déplacements nodaux des éléments
10. Traitement du résultat (calcul des déformations, calcul des contraintes)

➤ Assemblage de la matrice de raideur et du vecteur efforts globaux

Pour l'élément 1-2, les grandeurs locales s'écrivent :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

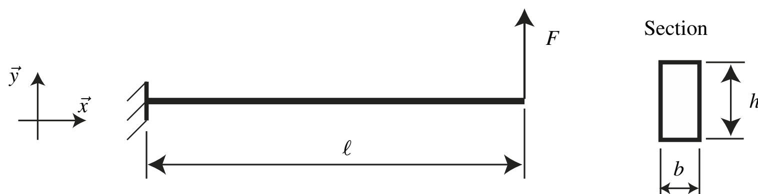
Dans le système global, et pour les nœuds i et j dans la table de connectivité :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K} + \begin{bmatrix} \ddots & & \cdots & & \cdots & \\ & \cdots & K_{ii} & \cdots & K_{ij} & \cdots \\ & & \cdots & \ddots & \cdots & \\ \vdots & \cdots & K_{ij} & \cdots & K_{jj} & \cdots \\ \vdots & \cdots & & \cdots & & \ddots \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

7.4 APPLICATION À L'ÉTUDE D'UNE POUTRE SOLLICITÉE EN FLEXION

7.4.1 Description du problème

Nous illustrons la méthode des éléments finis à la résolution d'un problème de résistance des matériaux classique, une poutre encastrée sollicitée en flexion.



Le matériau est un acier de module d'élasticité $E = 200$ GPa. La section de la poutre est rectangulaire, de largeur $b = 2$ cm et de hauteur $h = 4$ cm. Sa longueur est $\ell = 1$ m. Le chargement est un effort ponctuel $F = 1$ kN, appliqué à l'extrémité droite de la poutre.

Pour ce problème de flexion simple, nous utilisons une discrétisation éléments finis de type poutre d'Euler-Bernoulli. Nous comparerons la déformée de la solution calculée avec celle de la solution exacte qui s'écrit :

$$v(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

7.4.2 Construction de la matrice de raideur locale

L'élément utilisé pour la résolution du problème est un élément poutre à deux nœuds, comportant deux degrés de liberté par nœud, un déplacement vertical et une rotation.

a) Fonctions de forme

Pour un problème de poutre en flexion, dont la déformée est un polynôme de degré trois, on propose la fonction d'interpolation suivante :

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Les constantes a_0, a_1, a_2 et a_3 sont obtenues en fonction de la valeur des degrés de liberté aux nœuds 1 et 2, soient v_1, θ_1 et v_2, θ_2 :

$$v(0) = v_1 \qquad v'(0) = \theta_1$$
$$v(\ell) = v_2 \qquad v'(\ell) = \theta_2$$

Ces quatre conditions permettent d'écrire le système de quatre équations à quatre inconnues, permettant de calculer les constantes a_0, a_1, a_2 et a_3 :

$$\begin{cases} a_0 = v_1 \\ a_1 = \theta_1 \\ a_0 + a_1\ell + a_2\ell^2 + a_3\ell^3 = v_2 \\ a_1 + 2a_2\ell + 3a_3\ell^2 = \theta_2 \end{cases}$$

soit :

$$a_0 = v_1 \qquad a_1 = \theta_1$$

$$a_2 = 3\frac{v_2 - v_1}{\ell^2} - \frac{2\theta_1 + \theta_2}{\ell} \qquad a_3 = 2\frac{v_1 - v_2}{\ell^3} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{\ell^2}$$

La fonction d'interpolation s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} v(x) &= v_1 + \theta_1 x + \left(3\frac{v_2 - v_1}{\ell^2} - \frac{2\theta_1 + \theta_2}{\ell}\right) x^2 + \left(2\frac{v_1 - v_2}{\ell^3} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{\ell^2}\right) x^3 \\ &= \left(1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3}\right) v_1 + \left(x - \frac{2x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2}\right) \theta_1 \\ &\quad + \left(\frac{3x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3}\right) v_2 + \left(-\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2}\right) \theta_2 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, nous voyons apparaître les fonctions de formes φ :

$$\begin{bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3} & x - \frac{2x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} & \frac{3x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3} & -\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \\ -\frac{6x}{\ell^2} + \frac{6x^2}{\ell^3} & 1 - \frac{4x}{\ell} + \frac{3x^2}{\ell^2} & \frac{6x}{\ell^2} - \frac{6x^2}{\ell^3} & -\frac{2x}{\ell} + \frac{3x^2}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = [\varphi]\,[u]$$

Le calcul de la déformation repose sur l'hypothèse d'Euler-Bernoulli :

$$[\varepsilon] = \varepsilon_{11} = -\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} y$$

et l'écriture sous forme matricielle donne :

$$[\varepsilon] = -y \begin{bmatrix} -\frac{6}{\ell^2} + \frac{12x}{\ell^3} & -\frac{4}{\ell} + \frac{6x}{\ell^2} & \frac{6}{\ell^2} - \frac{12x}{\ell^3} & -\frac{2}{\ell} + \frac{6x}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

La relation de comportement est réduite à :

$$[\sigma] = [E]\,[\varepsilon] = E\,[\varepsilon]$$

b) Construction de la matrice de raideur locale

Les termes de la matrice de raideur locale se calculent à partir de l'expression (7.3) :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_\Omega [\delta]^t\,[E]\,[\delta]\,dV \\ &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ \text{(Sym)} & & K_{33} & K_{34} \\ & & & K_{44} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les différents termes étant :

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{0}^{\ell} y^2\left(-\frac{6}{\ell^2}+\frac{12x}{\ell^3}\right)^2 dxdydz\\
&= E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} y^2dydz\int_{0}^{\ell}\left(\frac{36}{\ell^4}-\frac{144x}{\ell^5}+\frac{144x^2}{\ell^6}\right)\,dx\\
&= EI\left[\frac{36x}{\ell^4}-\frac{72x^2}{\ell^5}+\frac{48x^3}{\ell^6}\right]_0^{\ell}=\frac{12EI}{\ell^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{12} &= E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{0}^{\ell} y^2\left(-\frac{6}{\ell^2}+\frac{12x}{\ell^3}\right)\left(-\frac{4}{\ell}+\frac{6x}{\ell^2}\right) dxdydz\\
&= E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} y^2dydz\int_{0}^{\ell}\left(\frac{24}{\ell^3}-\frac{84x}{\ell^4}+\frac{72x^2}{\ell^5}\right)\,dx\\
&= EI\left[\frac{24x}{\ell^3}-\frac{42x^2}{\ell^4}+\frac{24x^3}{\ell^5}\right]_0^{\ell}=\frac{6EI}{\ell^2}
\end{aligned}
$$

$$
K_{13} = -K_{11} = \frac{12EI}{\ell^3}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{14} &= E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{0}^{\ell} y^2\left(-\frac{6}{\ell^2}+\frac{12x}{\ell^3}\right)\left(-\frac{2}{\ell}+\frac{6x}{\ell^2}\right) dxdydz\\
&= E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} y^2dydz\int_{0}^{\ell}\left(\frac{12}{\ell^3}-\frac{60x}{\ell^4}+\frac{72x^2}{\ell^5}\right)\,dx\\
&= EI\left[\frac{12x}{\ell^3}-\frac{30x^2}{\ell^4}+\frac{24x^3}{\ell^5}\right]_0^{\ell}=\frac{6EI}{\ell^2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
K_{22} &= E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{\ell} y^2\left(-\frac{4}{\ell}+\frac{6x}{\ell^2}\right)^2 dxdydz \\
&= E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dydz\int_0^{\ell}\left(\frac{16}{\ell^2}-\frac{48x}{\ell^3}+\frac{36x^2}{\ell^4}\right)\, dx \\
&= EI\left[\frac{16x}{\ell^2}-\frac{24x^2}{\ell^3}+\frac{12x^3}{\ell^4}\right]_0^{\ell}=\frac{4EI}{\ell}
\end{aligned}$$

$$K_{23} = -K_{12} = -\frac{6EI}{\ell^2}$$

$$\begin{aligned}
K_{24} &= E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{\ell} y^2\left(-\frac{4}{\ell}+\frac{6x}{\ell^2}\right)\left(-\frac{2}{\ell}+\frac{6x}{\ell^2}\right) dxdydz \\
&= E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dydz\int_0^{\ell}\left(\frac{8}{\ell^2}-\frac{36x}{\ell^3}+\frac{36x^2}{\ell^4}\right)\, dx \\
&= EI\left[\frac{8x}{\ell^2}-\frac{18x^2}{\ell^3}+\frac{12x^3}{\ell^4}\right]_0^{\ell}=\frac{2EI}{\ell}
\end{aligned}$$

$$K_{33} = -K_{11} = \frac{12EI}{\ell^3}$$

$$K_{34} = -K_{14} = -\frac{6EI}{\ell^2}$$

$$\begin{aligned}
K_{44} &= E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{\ell} y^2\left(-\frac{2}{\ell}+\frac{6x}{\ell^2}\right)^2 dxdydz \\
&= E\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dydz\int_0^{\ell}\left(\frac{4}{\ell^2}-\frac{24x}{\ell^3}+\frac{36x^2}{\ell^4}\right)\, dx \\
&= EI\left[\frac{4x}{\ell^2}-\frac{12x^2}{\ell^3}+\frac{12x^3}{\ell^4}\right]_0^{\ell}=\frac{4EI}{\ell}
\end{aligned}$$

La matrice de raideur pour l'élément poutre est :

$$\mathbf{K_{ij}} = \begin{bmatrix} 12\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}^3} & 6\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} & -12\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}^3} & 6\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} \\ 6\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} & 4\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}} & -6\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} & 2\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}} \\ -12\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}^3} & -6\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} & 12\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}^3} & -6\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} \\ 6\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} & 2\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}} & -6\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} & 4\frac{EI_{ij}}{\ell_{ij}} \end{bmatrix}$$

7.4.3 Implantation et résolution dans Matlab

Le programme permettant la résolution du problème est le suivant :

```
% Parametre materiau
E = 200.e9 ; % [Pa]

% Longueur de la barre
lb = 1. ; % [m]

% Caracteristique de la section
b = 0.02 ; % Largeur [m]
h = 0.04 ; % Hauteur [m]
A = b*h ; % Section [m^2]
I = b*h^3/12. ; % Moment quadratique [m^4]

nel = 5 ; % nombre d'elements
ndof = 2 ; % nombre de degres de liberte par noeud
ntotdof = ndof*(nel+1) ; % nombre total
de degres de liberte du systeme

l = lb/nel ; % Longueur d'un element
```

```
% Conditions aux limites
ddlfixe(1) = 1 ; valfixe(1) = 0. ;
ddlfixe(2) = 2 ; valfixe(2) = 0. ;

% Declaration de K et F
vecforce = zeros(ntotdof,1) ;
kglobal = zeros(ntotdof,ntotdof) ;

% Chargement
vecforce(ntotdof-1) = 1.e3 ; % [N]

% Construction de la matrice de raideur globale
for iel=1:nel
   % Definition de la matrice de raideur locale
   klocal = [12.*E*I/l^3 6.*E*I/l^2
           -12.*E*I/l^3 6.*E*I/l^2;
            6.*E*I/l^2 4.*E*I/l  -6.*E*I/l^2 2.*E*I/l;
           -12.*E*I/l^3 -6.*E*I/l^2 12.*E*I/l^3
            -6.*E*I/l^2;
             6.*E*I/l^2 2.*E*I/l -6.*E*I/l^2 4.*E*I/l];
   % Assemblage de la matrice globale
   for idof=1:2*ndof
      for jdof=1:2*ndof
     igl = ndof*(iel-1)+idof ;
     jgl = ndof*(iel-1)+jdof ;
     kglobal(igl,jgl) = kglobal(igl,jgl)
           + klocal(idof,jdof) ;
      end
   end
end

% Prise en compte des conditions aux limites
for idof=1:length(ddlfixe)
```

```
   c = ddlfixe(idof);
   for jdof=1:size(kglobal)
      kglobal(c,jdof) = 0. ;
   end
   kglobal(c,c) = 1. ;
   vecforce(c) = valfixe(idof) ;
end

% Inversion du systeme
vecdisp = kglobal\vecforce ;

% Deplacement calcule
disp(['Deformee max calculee :
',num2str(vecdisp(ntotdof-1))])

% Deplacement theorique
disp(['Deformee max theorique :
',num2str(vecforce(ntotdof-1)*lb^3/(3.*E*I))])

% Construction de la solution approchee
abscisse = zeros(nel+1,1) ; deformee = zeros(nel+1,1) ;
i = 0 ;
for idof=1:ndof:ntotdof
    i = i+1 ;
    abscisse(i) = (i-1)*l ;
    deformee(i) = vecdisp(idof) ;
end

% Construction de la solution exacte
npref = 100 ;
abscisse_ref = zeros(npref,1);
deformee_ref = zeros(npref,1);
for idof=1:npref
    abscisse_ref(idof) = lb/(npref-1)*(idof-1);
```

```
    deformee_ref(idof) = vecforce(ntotdof-1)*...
    (lb*abscisse_ref(idof)^2/2-abscisse_ref(idof)^3/6)/
(E*I);
end

plot(abscisse_ref,deformee_ref,abscisse,deformee)
legend('exacte','approchee',2)
xlabel('abscisse (m)')
ylabel('deformee (m)');
```

Comme attendu, la solution éléments finis aux nœuds de chaque élément est exacte : la fonction d'interpolation est en effet du degré polynomial de la déformée. La comparaison entre la solution exacte et la solution numérique obtenue avec cinq éléments est représentée ci-dessous.

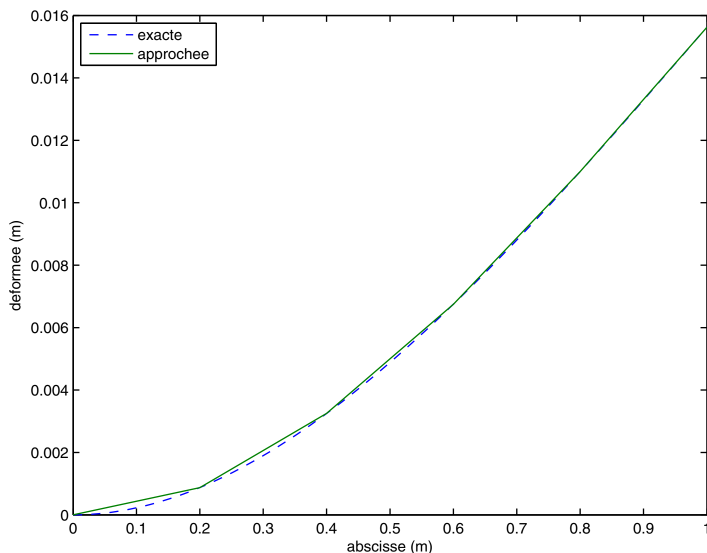


Figure 7.1

7.5 ÉLÉMENTS ISOPARAMÉTRIQUES

Les éléments isoparamétriques reposent sur l'utilisation d'un changement de repère entre deux systèmes de coordonnées. Ils permettent l'écriture unique des fonctions de forme pour un type d'élément. Les fonctions de formes s'écrivent dans le repère *naturel* (ξ, η, ζ), le problème de référence s'écrivant dans le repère *physique* (x, y, z). La transformation géométrique pour passer d'un repère à un autre utilise les fonctions de forme de l'élément. Ainsi, pour un élément à n nœuds,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\xi, \eta, \zeta) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\xi, \eta, \zeta) y_i$$

$$z = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\xi, \eta, \zeta) z_i$$

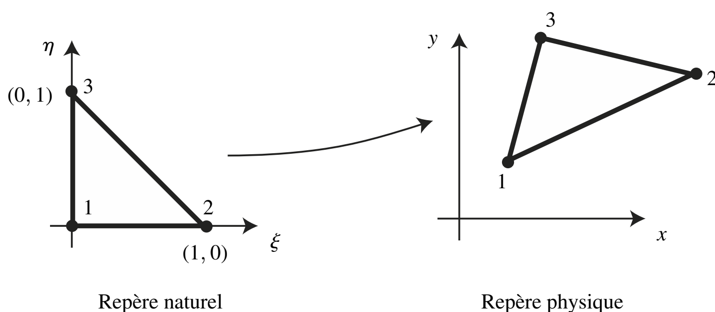


Figure 7.2

7.6 FONCTIONS DE FORME DES ÉLÉMENTS ISOPARAMÉTRIQUES COURANTS

7.6.1 Élément barre à deux nœuds

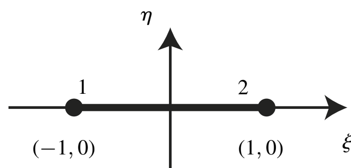


Figure 7.3

$\varphi_1(\xi,\eta) = \dfrac{1}{2}(1-\xi)$	$\varphi_2(\xi,\eta) = \dfrac{1}{2}(1+\xi)$

7.6.2 Élément barre à trois nœuds

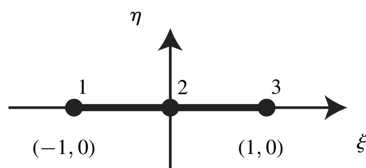


Figure 7.4

$\varphi_1(\xi,\eta) = \dfrac{1}{2}(\xi^2-\xi)$	$\varphi_2(\xi,\eta) = (1-\xi^2)$
$\varphi_3(\xi,\eta) = \dfrac{1}{2}(\xi^2+\xi)$	

7.6.3 Élément triangulaire à trois nœuds

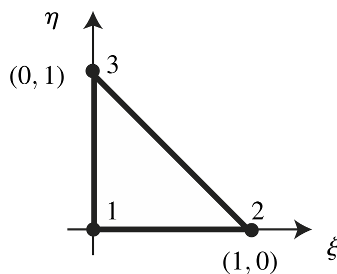
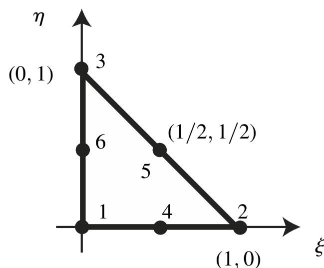


Figure 7.5

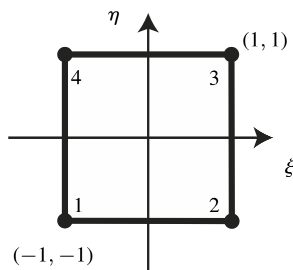
$\varphi_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$	$\varphi_2(\xi, \eta) = \xi$
$\varphi_3(\xi, \eta) = \eta$	

7.6.4 Élément triangulaire à six nœuds



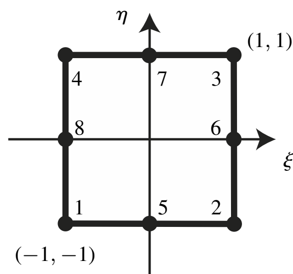
$\varphi_1(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta)$	$\varphi_2(\xi, \eta) = \xi(2\xi - 1)$
$\varphi_3(\xi, \eta) = \eta(2\eta - 1)$	$\varphi_4(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta)$
$\varphi_5(\xi, \eta) = 4\xi\eta$	$\varphi_6(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta)$

7.6.5 Élément quadrangulaire à quatre nœuds



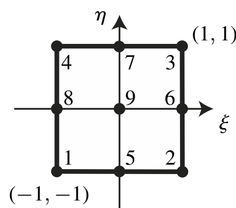
$\varphi_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$\varphi_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$
$\varphi_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	$\varphi_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

7.6.6 Élément quadrangulaire à huit nœuds



$\varphi_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)$	$\varphi_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)$
$\varphi_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)$	$\varphi_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)$
$\varphi_5(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$	$\varphi_6(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$
$\varphi_7(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$	$\varphi_8(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$

7.6.7 Élément quadrangulaire à neuf nœuds



$\varphi_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(\xi^2-\xi)(\eta^2-\eta)$	$\varphi_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(\xi^2+\xi)(\eta^2-\eta)$
$\varphi_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(\xi^2+\xi)(\eta^2+\eta)$	$\varphi_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(\xi^2-\xi)(\eta^2+\eta)$
$\varphi_5(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(\eta^2-\eta)$	$\varphi_6(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(\xi^2+\xi)(1-\eta^2)$
$\varphi_7(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(\eta^2+\eta)$	$\varphi_8(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(\xi^2-\xi)(1-\eta^2)$
$\varphi_9(\xi,\eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$	

Chapitre 8

Instabilité des structures

Dans ce chapitre sont exposés les principaux résultats concernant le calcul mécanique de structures élancées soumises à des risques d'instabilités. Pour de tels éléments, les classiques équations de la RDM relatives à la mécanique des milieux continus en petites transformations ne s'appliquent plus. Il faut dorénavant tenir compte de la déformation de la structure pour évaluer les efforts internes à cette dernière.

8.1 INSTABILITÉ DE POUTRES

8.1.1 Poutre d'Euler

Soit une poutre bi-articulée de longueur l, de section S et de moment quadratique I. La colonne est chargée par une force P, considérée positive en compression. Nous supposerons que la colonne est parfaitement alignée avec l'axe de la charge avant que cette dernière ne soit appliquée. La plus petite charge pour laquelle l'instabilité élastique est détectée est dénommée

la charge critique d'Euler P_E et a pour expression :

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

La déformée correspondante forme une demi sinusoïde, donnée à un facteur amplificateur près q :

$$v(x) = q \sin(\pi x)/l$$

en notant $i = \sqrt{I/S}$, le rayon de giration de la section, on peut définir l'élancement λ de la poutre par la relation $\lambda = l/I$. On peut ainsi obtenir la valeur de la contrainte critique de flambement :

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda}$$

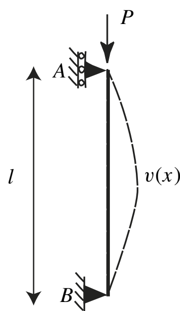


Figure 8.1

La charge critique d'Euler correspond au plus petit effort possible permettant de maintenir l'équilibre sous la déformée $v(x)$. Le flambement d'une telle poutre peut être obtenu pour des charges critiques P_{cr_n} plus élevées correspondant à des harmoniques $v_n(x)$ différentes. La charge critique de flambement du mode n ainsi que son allure sont données par :

$$P_{cr_n} = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{et} \quad v_n(x) = q_n \sin(n\pi x)/l$$

8.1.2 Solutions générales des poutres comprimées

Du fait des conditions limites particulières liées à la résolution du problème de la poutre d'Euler au paragraphe précédent, les efforts internes à la structure pouvaient être déterminés sans prise en comptes des efforts de liaison. Dans le cadre le plus générale, ces derniers doivent être pris en compte, et l'équation différentielle suivante doit être résolue, avec les effets du second ordre dans l'équilibre d'un tronçon de poutre :

$$\left(EIv''(x)\right)'' + \left(Pv'(v)\right)' = 0$$

La solution générale pour E, I et P constants est donnée par :

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D$$

A, B, C et D sont des constantes à déterminer en fonction des conditions aux limites de la pièce étudiée. Les types de liaison les plus fréquemment rencontrés sont, pour un appui O :

- L'encastrement : $v_O = 0$ et $v'_O = 0$
- La rotule : $v_O = 0$, $M_O = 0$ et $u_O = 0$
- L'appui simple : $v_O = 0$ et $M_O = 0$
- L'appui continu de raideur k
- Libre : $V_O = 0$ et $M_O = 0$
- L'encastrement partiel, induisant une raideur en rotation : k_0

8.1.3 Solutions particulières pour des poutres de section constante

Nous appelerons l_0 la longueur de flambement, correspondant à la longueur qu'il faudrait appliquer à la solution de la poutre d'Euler pour obtenir les mêmes charges critiques de flambement pour tout autre type de conditions limites.

Cas de colonnes supportant une charge axiale en tête :

Type de liaisons	Schémas	Charges critiques	Longueur de flambement
Appui simple - Rotule		$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2}$	$\ell_0 = \ell$
Appui simple - Encastrement		$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{(0.699\ell)^2}$	$\ell_0 = 0.699\ell$
Encastrement - Encastrement		$P_{cr} = \dfrac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$	$\ell_0 = \ell/2$
Encastrement - Libre		$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$	$\ell_0 = 2\ell$
Encastrement - Encastrement et $v_0 \neq 0$		$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2}$	$\ell_0 = \ell$
Encastrement partiel - libre		$P_{cr} = \dfrac{k\pi^2 EI}{4k\ell^2 + \pi^2 EI\ell}$	$\ell_0 = 2\ell\sqrt{1 + \dfrac{\pi^2 EI}{4k\ell}}$
Rotules - Appui continu	k $m = \dfrac{\ell}{\pi}\sqrt[4]{\dfrac{k}{EI}}$	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2}\left(m^2 + \dfrac{k\ell^4}{m^2\pi^4 EI}\right)$	$\ell_0 = \ell/\sqrt{m^2 + \dfrac{k\ell^4}{m^2\pi^4 EI}}$

Cas de colonnes tenues par des encastrements partiels, les raideurs en rotation sont caractérisées par des paramètres k_A et k_B :

– Pour des noeuds d'extrémités non déplaçables :

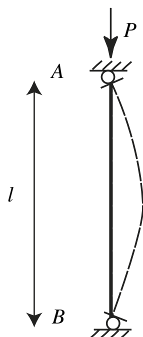


Figure 8.2

Nous posons

$$s = \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B},\ p = \frac{1}{k_A k_B} \text{ et } k = \frac{EI}{l}$$

$$\text{et } K = \frac{3k_2 p + ks + 0.32}{3k_2 p + 0.7ks + 0.16}$$

$$P_{cr} = K^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \text{ et } l_0 = \frac{l}{K}$$

– Pour des noeuds d'extrémités déplaçables :

$$s = \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \text{ et } k = \frac{EI}{l}$$

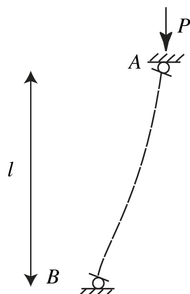


Figure 8.3

$$\rho_A = \frac{k}{k_A} \text{ et } \rho_B = \frac{k}{k_B}$$

$$\alpha_A = \frac{0.4 + \rho_B}{0.8 + ks} \text{ et } \alpha_B = \frac{0.4 + \rho_A}{0.8 + ks}$$

$$K_A = \alpha_A^2 + \frac{\pi^2 \rho_A \alpha_A}{4},\ K_B = \alpha_B^2 + \frac{\pi^2 \rho_B \alpha_B}{4}$$

$$\text{et } K = \text{Max}(K_A \text{ et } K_B)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4Kl^2} \text{ et } l_0 = 2l\sqrt{K}$$

Cas de colonnes supportant des charges sur toute leur hauteur :

Type de liaisons	Schémas	Charges critiques	Longueur de flambement
Encastrement - Libre	ℓ, p	$P_{cr} = \frac{7.83\pi^2 EI}{\ell^2}$	$\ell_0 = 1.12\ell$
Encastrement - Libre	ℓ, p_i, x_i	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI \sum P_i}{4\ell^2 \sum P_i \left(1 - \cos\frac{\pi x_i}{2\ell}\right)}$	$\ell_0 = 2\ell\sqrt{\frac{\sum P_i \left(1 - \cos\frac{\pi x_i}{2\ell}\right)}{\sum P_i}}$
Encastrement - Libre	P, ℓ, p	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2(\frac{4P}{P+p\ell} + 1.26)}$	$\ell_0 = \ell\sqrt{\frac{4P}{P+p\ell} + 1.26}$
Rotule - Rotule	P, ℓ, p	$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI}{\ell^2(1 + \frac{P}{P+p\ell})}$	$\ell_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{P}{P+p\ell}}$

8.1.4 Prise en compte d'un défaut initial

Le cas des colonnes parfaites étudiées jusqu'à présent est un modèle idéalisé. En réalité, différentes sortes d'imperfections inévitables doivent être considérées. Par exemple, des poteaux peuvent être soumis à des charges latérales parasites ou présenter une géométrie courbe induisant une excentricité initiale. Dans ces deux cas il est important de pouvoir estimer

l'amplification de ce défaut initial à l'approche de la valeur critique de la charge de flambement. Si on assimile un défaut initial à une courbure de la colonne ayant pour déplacement maximal v_0 (ou moment parasite maximal M_0), le déplacement (ou moment) atteint en ce même point, fonction de la charge appliquée P est amplifié du paramètre μ :

$$\mu = \frac{1}{1 - P/P_{cr}}$$

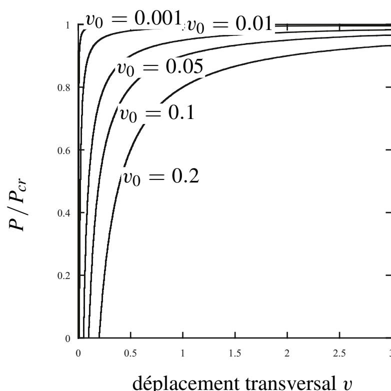


Figure 8.4

8.2 CALCUL DES MOMENTS DANS UNE POUTRE COMPRIMÉE FLÉCHIE

En considérant une poutre comprimée, sujette au risque de flambement, et supportant des charges latérales induisant une flexion dans le plan de flambement, l'analyse des contraintes requiert de prendre en compte l'amplification des efforts due à l'instabilité.

Le moment fléchissant maximal et déplacement transversal maximal dus uniquement aux charges latérales sont dénommés respectivement M_0 et v_0.

– Poutre sur deux appuis simples d'extrémité supportant une charge transversale symétrique : le moment est maximal en son centre et une bonne approximation de ce dernier est obtenu en considérant :

$$M = M_0 \left(1 + \frac{\pi^2 u}{\Psi(1-u)}\right)$$

Avec $u = \frac{P}{P_{cr}}$, $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ et $\Psi = -\frac{M_0 l^2}{EI v_0}$

– Poutre en console

$$M = M_0 \left(1 + \frac{\pi^2 u}{4\Psi(1-u)}\right)$$

Avec $u = \frac{P}{P_{cr}}$, $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ et $\Psi = \frac{M_0 l^2}{EI v_0}$

8.3 DÉVERSEMENT LATÉRAL DE POUTRES

Le déversale latéral d'une poutre est un phénomène d'instabilité élastique consistant en un flambement accompagné de torsion. Ce phénomène se produit pour des poutres étroites, non maintenues latéralement, pour des valeurs de contraintes de flexion bien inférieures à la limite d'élasticité du matériau considéré.

8.3.1 Déversement latéral de poutres à section rectangulaire

En considérant une poutre en flexion, il est possible d'obtenir la valeur limite des moments maximaux critiques menant au déversement. Le tableau ci-après récapitule les diverses conditions classiquement recontrées. On note G, le module de cisaillement et J, le moment d'inertie en rotation autour de $\overrightarrow{z}$.

Description	Schémas	Moments critiques
Poutre sur appuis simples soumise à un moment constant		$M_{cr} = \frac{\pi}{\ell}\sqrt{EI_y GJ}$
Poutre bi-rotulée soumise à un moment constant		$M_{cr} = \frac{2\pi}{\ell}\sqrt{EI_y GJ}$
Poutre sur appuis simples soumise à une charge constante		$M_{cr} = \frac{1.12\pi}{\ell}\sqrt{EI_y GJ}$
Poutre sur appuis simples soumise à une charge concentrée		$M_{cr} = \frac{1.35\pi}{\ell}\sqrt{EI_y GJ}$
Poutre en console soumise à une charge constante		$M_{cr} = \frac{2.04\pi}{\ell}\sqrt{EI_y GJ}$
Poutre encastrée soumise à une charge concentrée		$M_{cr} = \frac{1.28\pi}{\ell}\sqrt{EI_y GJ}$

8.3.2 Déversement latéral de poutres à section en I

Dans le cas particulier des profilés à section ouverte, ou en I, les conditions d'attache aux extrémités peuvent limiter le gauchissement de la section et donc engendrer des augmentations de raideur en cisaillement. Les simples résultats précédents doivent être modifiés pour prendre en compte ces variations.

Description	Schémas	Moments critiques	α_1	α_2	α_3
Poutre sur appuis simples soumise à un moment constant	$\vec{y}$, $\vec{x}$, M, M, ℓ	$M_{cr} = \frac{\alpha}{\ell}\sqrt{EI_y GJ}$	1	1.83	0
Poutre sur appuis simple soumise à une charge concentrée	$\vec{y}$, $\vec{x}$, P, ℓ	$M_{cr} = \frac{\alpha}{\ell}\sqrt{EI_y GJ}$	1	1.35	0.55
Poutre bi-rotulée soumise à une charge concentrée	$\vec{y}$, $\vec{x}$, P, ℓ	$M_{cr} = \frac{\alpha}{\ell}\sqrt{EI_y GJ}$	0.5	1.07	0.42
Poutre bi-encastrée à déplacement axial libre	$\vec{y}$, $\vec{x}$, P, ℓ	$M_{cr} = \frac{\alpha}{\ell}\sqrt{EI_y GJ}$	1	1.7	1.42

Avec $\alpha = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\pi\left[\sqrt{1+\dfrac{\pi^2 EI_\omega}{(\alpha_1 L)^2 GJ}\left(1+\alpha_3^2\right)} \pm \dfrac{\alpha_3\pi}{\alpha_1 L}\sqrt{\dfrac{EI_\omega}{GJ}}\right]$ et en notant h la hauteur du profilé, $I_\omega = \dfrac{I_y}{4}h^2$. J est le moment d'inertie polaire.

8.4 INSTABILITÉ ET VOILEMENT DE PLAQUES

L'instabilité par voilement se rencontre pour des éléments de structures plan élancés de type plaque. De façon analogue au flambement des poutres, il convient d'étudier l'équilibre d'une plaque en position déformée. Afin de déterminer les équations d'équilibre d'un élément de plaque soumise à une compression dans son plan, il convient de faire l'hypothèse d'une surface « presque plane ». De telles hypothèses nous permettent de prendre les axes

du repère général comme ligne de coordonnées portant les abscisses curvilignes $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de la plaque. En projetant les équations vectorielles d'équilibre d'un élément de plaque dans le repère lié à la plaque, nous obtenons cinq équations d'équilibre dont une seule sera utile pour notre cas. En introduisant les expressions des efforts tranchants en fonction de la déformée transversale de la plaqué notée ω, nous obtenons l'équation de Lagrange généralisée.

$$P_Z - D\triangle\triangle\omega + N_x\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} = 0$$

Pour une plaque d'épaisseur h, la rigidité de flexion de l'élément vaut : $D = Eh^3/12\left(1-\nu^2\right)$. Nous traiterons d'une plaque simplement appuyée sur ces quatre côtés, soumises à un effort normal le long du plus grand coté a.

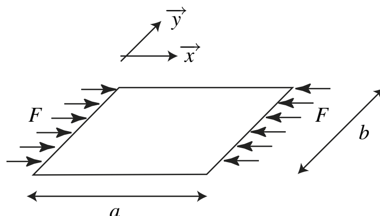


Figure 8.5

En dénommant les différents modes d'instabilité possible par le nombre de demi-ondes m et n transversales de cloquage développées respectivement dans les directions $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$, l'allure de la déformée transversale (à un facteur d'amplification q près) est de la forme :

$$\omega_{xy} = q_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

La charge fondamentale de flambement (la plus petite) est obtenue avec $n = 1$ et $m = a/b$ et vaut $F_{cr} = 4\pi^2 D/b^2$. Si les dimensions de la plaque sont fixées, m n'est pas un entier. Nous pouvons tracer sur un schéma l'évolution

de la charge critique en fonction du rapport a/b pour différentes valeurs de m :

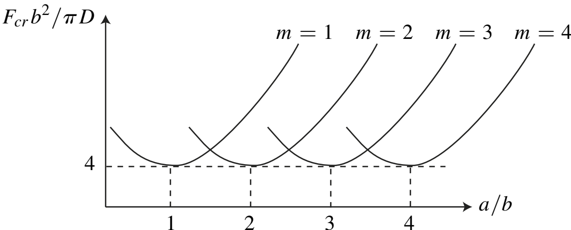


Figure 8.6

En fonction des dispositions d'appuis le long des faces latérales, les efforts critiques de voilement prennent différentes valeurs.

Description	**Schémas**	**Efforts critiques**
Plaque sur appuis simples	F F b a	$F_{cr} = 4\pi^2 D/b^2$
Plaque encastrée-appuis simples	F F b a	$F_{cr} = 5.42\pi^2 D/b^2$
Plaque bi-encastrée	F F b a	$F_{cr} = 6.97\pi^2 D/b^2$
Plaque encastrée-libre	F F b a	$F_{cr} = 1.28\pi^2 D/b^2$
Plaque appuis simples-libre	F F b a	$F_{cr} = 0.425\pi^2 D/b^2$

8.5 FLAMBEMENT DE STRUCTURES NON PLANES INITIALEMENT

8.5.1 Flambement d'arc et d'anneaux

Considérant des pièces non planes supportant une pression extérieure p, les résultats ci-après récapitulent quelques résultats importants de pression critique avant flambement.

– Arc circulaire simplement appuyé :
  α représente l'ouverture angulaire de l'arc de rayon R considéré.

$$p_{cr} = \left(\frac{4\pi^2}{\alpha^2} - 1\right)\frac{EI}{R^3}$$

– Arc circulaire encastré à ses extrémités :

$$p_{cr} = \left(k^2 - 1\right)\frac{EI}{R^3}$$

avec

α	60°	120°	180°	240°	300°	360°
k	8.62	4.37	3	2.36	2.07	2

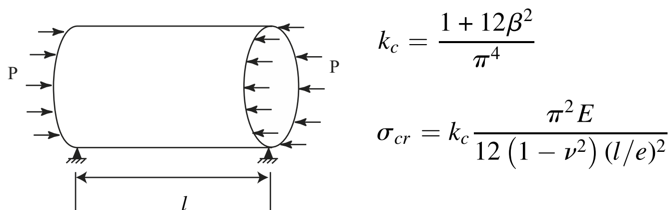
8.5.2 Flambement de tubes minces

Le tube est d'épaisseur e, de longueur L et de rayon R. On note :

$$\beta = \left(\frac{L}{R}\right)^2\left(\frac{R}{e}\right)\sqrt{1-\nu^2}.$$

La contrainte critique de flambement σ_{cr} est donnée ci-après.

– Tube mince en compression simplement appuyé à ses extrémités

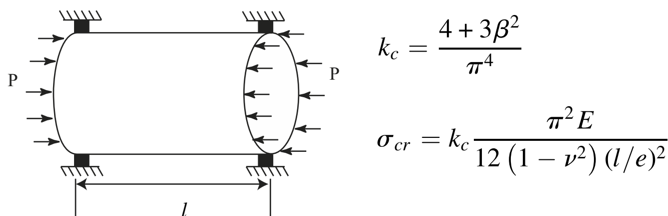


$$k_c = \frac{1 + 12\beta^2}{\pi^4}$$

$$\sigma_{cr} = k_c \frac{\pi^2 E}{12\left(1-\nu^2\right)(l/e)^2}$$

Figure 8.7

– Tube mince en compression encastré à ses extrémités



$$k_c = \frac{4 + 3\beta^2}{\pi^4}$$

$$\sigma_{cr} = k_c \frac{\pi^2 E}{12\left(1-\nu^2\right)(l/e)^2}$$

Figure 8.8

– Tube mince sous pression externe

La pression critique de flambement du tube soumis à une pression uniforme vaut :

$$P_{cr} = \left(\frac{E}{R}\right)^3 \frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}$$

Chapitre 9

Calcul non-linéaire, analyse limite, plasticité

9.1 INTRODUCTION

Les problèmes précédemment traités étudiaient le comportement élastique des matériaux. Cependant les lois de comportement élastiques linéaires ne sont pas toujours valables. Lors de sollicitations exceptionnelles ou accidentelles, des contraintes supérieures à la limite élastique du matériau peuvent se produire et entraîner des déformations permanentes tandis que la structure peut continuer à résister sans s'effondrer. Nous étudions alors la stabilité globale de la structure suite à l'apparition locale de la plasticité.

Cette étude de stabilité s'appelle analyse limite en RDM.

9.2 MODÈLES DE COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX

Si l'on trace les courbes de comportement σ–ε pour un matériau ductile on obtient une courbe de même type que celle de la figure 9.1 (a). À partir de cette courbe de comportement, on peut adopter plusieurs modélisation :

– figure 9.1 (b) : modèle élasto-plastique avec écrouissage,
– figure 9.1 (c) : modèle élasto-plastique parfait,
– figure 9.1 (d) : modèle rigide plastique ou plastique parfait.

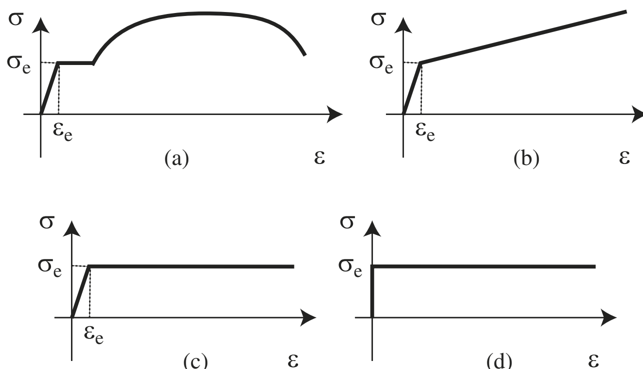


Figure 9.1 Lois de comportement : matériau ductile (a), modèle élasto-plastique écrouissable (b), modèle élasto-plastique parfait (c), modèle rigide plastique (d)

9.3 PLASTIFICATION EN FLEXION : NOTION DE MOMENT PLASTIQUE ET ROTULE PLASTIQUE

9.3.1 Hypothèses

Nous considérerons par la suite que :

– le matériau est isotrope,

– le comportement est élasto-plastique parfait,
– l'hypothèse de Bernoulli est vérifiée.

9.3.2 Section symétrique

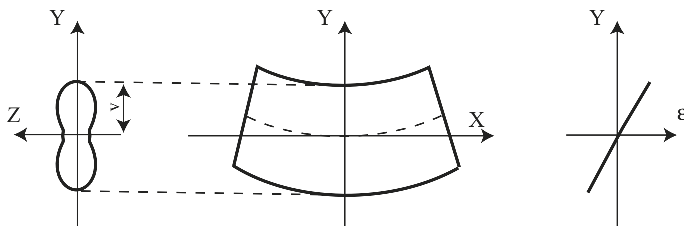


Figure 9.2 Poutre en flexion de section symétrique

Considérons la poutre de la figure 9.2 de section symétrique majoritairement soumise à de la flexion. En élasticité, nous pouvons écrire la relation suivante entre la contrainte et le moment fléchissant :

$$\sigma = \frac{M}{I}v = \frac{M}{W} \tag{9.1}$$

avec $W = I/v$ le module de flexion de la section considérée.

Si nous continuons à augmenter le moment de flexion, la limite élastique va alors être atteinte en premier pour $y = v$. Nous obtenons alors les phases de comportement de la figure 9.3 :

– phase élastique : comportement « classique » d'une section en flexion
– État 1 : limite élastique. Le moment sollicitant est alors égal au moment maximum élastique M_e. On a alors $\sigma_{max} = \sigma_e = M_e/W$ d'où $M_e = W\sigma_e$. La courbure élastique maximum vaut alors $\chi_e = M_e/(EI)$ et la déformation élastique $\varepsilon_e = \chi_e.v$
– État 2 : plastification progressive de la section ($M > M_e$). Dû à la symétrie de la section et de la courbe de comportement du matériau, l'axe neutre reste à mi-hauteur. On peut montrer que $\chi_e/\chi = 2y_e/h$ ce qui implique que la courbure augmente tandis que y_e diminue.

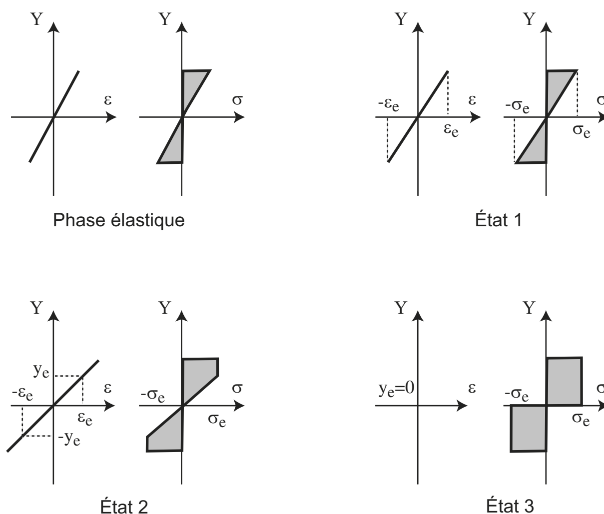


Figure 9.3 Différentes phases de comportement d'une section en flexion

– État 3 : plastification complète de la section. Formation d'une **rotule plastique**, $\lim_{y_e->0} \chi = \infty$. À cet état correspond le moment plastique noté M_{pl}. On définit le module plastique $W_{pl} = M_{pl}/\sigma_e = 2\mathcal{M}_x$ avec $\mathcal{M}_x$ le moment statique de la moitié de la section / x.

Pour une section rectangulaire $b \times h$ on obtient :

$$W = bh^2/6 \quad \text{et} \quad W_{pl} = bh^2/4.$$

Soit $M_e = W\sigma_e$ le moment élastique maximum et $M_{pl} = W_{pl}\sigma_e$ le moment plastique. On définit le gain de résistance par plastification :

$$G = 100\left(\frac{M_{pl}}{M_e} - 1\right) \tag{9.2}$$

ce qui donne pour une section rectangulaire, $G = 50$ %.

9.4 ANALYSE LIMITE D'UN SYSTÈME DE POUTRES

9.4.1 Enjeux

Soit un système de poutres soumis au chargement extérieur $\mathcal{F}_{ext}$. Sous l'hypothèse d'un comportement plastique parfait du matériau constitutif de la structure, celle-ci sera mise en ruine pour un chargement $\mathcal{F}_{crit} = \lambda_{ult}\mathcal{F}_{ext}$ par l'apparition d'un nombre suffisant de rotules plastiques transformant la structure en mécanisme. On aura donc un accroissement proportionnel de toutes les charges par le facteur de charge λ jusqu'au facteur de charge ultime λ_{ult}. Pour déterminer celui-ci on a deux approches : la méthode STATIQUE et la méthode CINÉMATIQUE.

9.4.2 Théorème statique

À tout état de contrainte statiquement admissible ($|M| \leqslant M_{pl}$ partout) vérifiant les conditions cinématiques (C.L. et moment M_{pl} de même sens que les rotations plastiques au droit des rotules) correspond un facteur de charge :

$$\lambda_{stat} \leqslant \lambda_{ult} \tag{9.3}$$

➤ Application

Soit la structure de la figure 9.4.

• On calcule le moment M dans la structure et on trace le diagramme associé.

• On suppose que $\pm M_{pl}$ est atteint en un point de la structure (point de moment maximum) pour $\lambda = \lambda_1$. On a donc $\lambda_1 ql^2/12 = M_{pl}$ soit

$$\lambda_1 = 12M_{pl}/ql^2.$$

• On place deux rotules en A et C (voir figure 9.5) qui reprennent alors un moment égal à $-M_{pl}$ et on vérifie que $|M| \leqslant |M_{pl}|$ pour toute la structure. Ici, $M_B = \lambda ql^2/8 - M_{pl}$ avec :

$$\lambda > \lambda_1 => \lambda ql^2/8 > \lambda_1 ql^2/8 = 3M_{pl}/2 > M_{pl}.$$

on a donc bien $M_B > 0$ et $|M_B| \leqslant M_{pl}$.

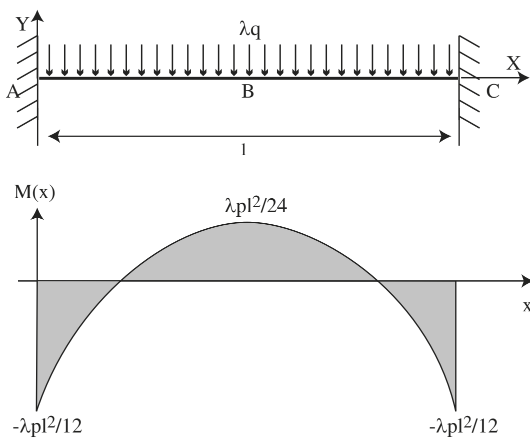


Figure 9.4 Poutre bi-encastrée en flexion

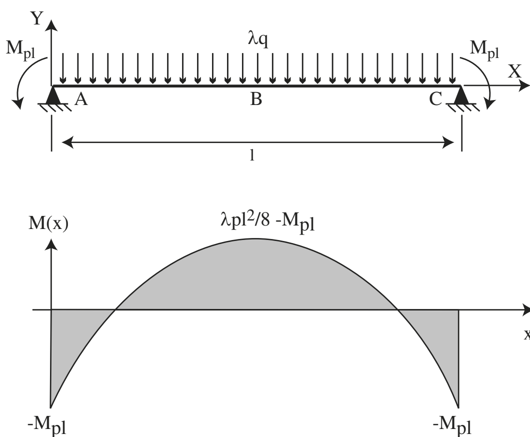


Figure 9.5 Poutre bi-encastrée en flexion avec deux rotules plastiques en A et C

• On continue jusqu'à la ruine de la structure qui correspond à la formation de n rotules où $n = H + 1$. Ici, λ croît jusqu'à avoir $M_B = M_{pl}$. Ce qui donne $\lambda_{stat} ql^2/8 - M_{pl} = M_{pl}$ soit $\lambda_{stat} = 16M_{pl}/ql^2$. On obtient alors le mécanisme de la figure 9.6

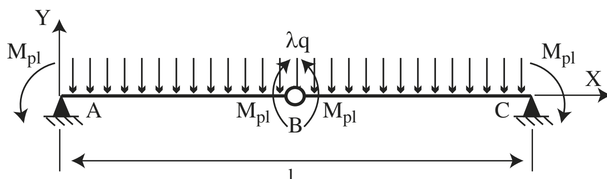


Figure 9.6 Poutre bi-encastrée en flexion avec trois rotules plastiques en A, B et C

9.4.3 Théorème cinématique

À un mécanisme de ruine arbitraire, où tous les éléments non plastifiés sont supposés rigides (entre deux rotules successives), correspond un facteur de charge

$$\lambda_{cin} \geqslant \lambda_{ult} \tag{9.4}$$

➤ Application :

Soit la structure de la figure 9.7.

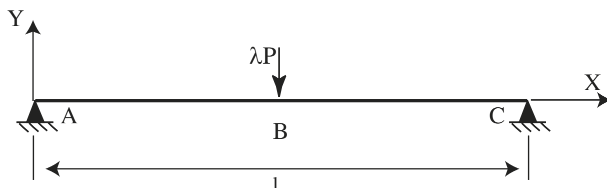


Figure 9.7 Poutre simplement appuyée en flexion

• On imagine un mécanisme de ruine, par exemple celui de la figure 9.8.

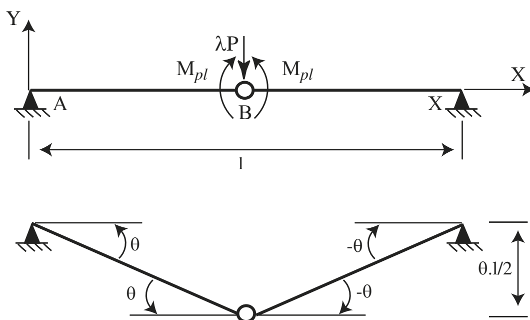


Figure 9.8 Poutre simplement appuyée en flexion

• Pour chacun des mécanismes on applique le PTV à des champs rigidifiants par morceaux plastiquement admissibles ($|M_{pl}| \leqslant M_{pl}$). Dans notre exemple, cela donne :

$$-2M_{pl}\theta + \lambda P\theta\frac{l}{2} = 0 \quad \text{soit} \quad \lambda = \frac{4M_{pl}}{Pl} \tag{9.5}$$

• On aurait pu placer la rotule en une section quelconque $\rightarrow \lambda_i$. Le théorème cinématique nous dit alors que $\lambda_{cin} \leqslant min\{\lambda_i\}$.

a) Points particuliers de la méthode cinématique

Sections potentiellement critiques :

- point d'application des charges ponctuelles
- point de moment maximum pour les charges réparties
- assemblage
- encastrement

Mécanismes de ruine possibles :

- mécanisme de poutre
- mécanisme de panneau
- mécanisme des nœuds

Exemple : Soit la structure de la figure 9.9.

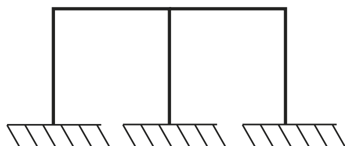


Figure 9.9 Structure de poutres

Les figures suivante illustrent les différents modes de ruine que l'on peut rencontrer.

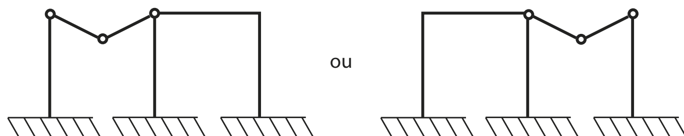


Figure 9.10 Mécanisme de poutre : ruine partielle ($n < H + 1$)

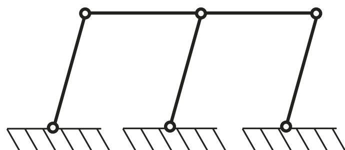


Figure 9.11 Mécanisme de panneau

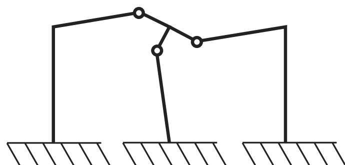


Figure 9.12 Mécanisme de nœud : ruine partielle ($n < H + 1$)

Chapitre 10

Dynamique et vibrations

Pour un problème dynamique, le chargement et les paramètres de réponse sont fonction du temps. La principale caractéristique d'un problème dynamique est la présence d'efforts d'inertie non-négligeables qui, d'après le principe de d'Alembert, s'opposent au mouvement imposé par le chargement appliqué.

Une charge est dynamique si sa norme, sa direction ou son point d'application varie avec le temps. Si l'évolution de ces grandeurs est prescrite de manière unique, l'analyse est dite déterministe. Au contraire, si la variation du chargement en fonction du temps n'est pas connue et ne peut être définie qu'en termes statistiques, le chargement est dit aléatoire. Parmi les différentes charges dynamiques, on peut distinguer :

- les charges périodiques de période $T\left(p(t+T) = p(t)\right)$, parmi lesquelles nous pouvons distinguer les charges harmoniques simples et les charges périodiques quelconques,
- les charges non périodiques : charges impulsionnelles, charges arbitraires de longues durées (séisme, vent, houle, ...).

10.1 SYSTÈME À 1 DEGRÉ DE LIBERTÉ

En dynamique, on appelle le degré de liberté d'un système la somme du nombre de mouvement possible de chaque masse du-dit système. Toute la difficulté du modélisateur réside donc dans l'étape de discétisation permettant de choisir le nombre minimum de masses ponctuelles décrivant au mieux la réponse dynamique de l'ensemble.

10.1.1 Équation du mouvement

Soit un système masse-ressort-amortisseur soumis à la gravité et à un chargement extérieur fluctuant dans le temps $p(t)$. Les différentes forces agissant sur un tel système peuvent être associées à :

- un ressort supposé linéaire dont le déplacement $u(t)$ développe une force de rappel élastique $f_e(t)$,
- un amortisseur, supposé linéaire, produit une force dissipative visqueuse proportionnelle à la vitesse $f_d(t)$,
- une accélération subie par la masse m, dans un référentiel fixe, se traduit par une force d'inertie (selon le principe de d'Alembert) $f_i(t)$,
- des efforts extérieurs $f_{ext}(t)$ appliqués à la masse m proviennent de deux origines : un effort statique dû au poids propre mg et une sollicitation dynamique $p(t)$.

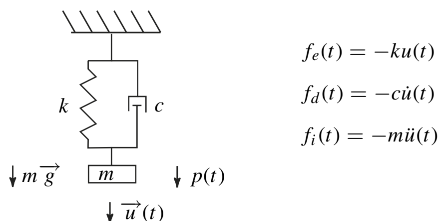


Figure 10.1

L'équation d'équilibre dynamique de la masse m s'écrit en invoquant le principe de d'Alembert par la prise en compte des efforts d'inertie sous forme d'efforts extérieurs : $\sum F(t) = 0$, soit :

$$ku(t) + c\dot{u}(t) + m\ddot{u}(t) = mg + p(t)$$

En décomposant le déplacement $u(t)$ en un terme statique $u_s = mg/k$ et un terme dynamique $u_d(t)$, il s'avère que les composantes statiques s'éliminent entre elles dans l'équation du mouvement précédente pour ne conserver que la partie dynamique du déplacement :

$$ku_d(t) + c\dot{u}_d(t) + m\ddot{u}_d(t) = p(t)$$

Pour des systèmes linéaires, il y a découplage entre les effets statiques et dynamiques. Un problème de dynamique linéaire ne devra pas comporter de composantes statiques aussi bien en effort qu'en déplacement. Seule sera prise en compte la partie dynamique du déplacement assimilée à une perturbation dynamique autour de la position d'équilibre statique. Dans la suite, dans un souci de simplicité nous noterons $u_d(t) = u(t)$.

On peut différentier l'étude d'un système dynamique en fonction de différents régimes vibratoires : libre, forcé ou permanent.

10.1.2 Le régime libre

Un régime libre correspond à la solution générale de l'équation différentielle sans second membre (pour $p(t) = 0$). Les conditions intiales à $t = 0$ sont un déplacement et une vitesse initiale notée u_0 et $\dot{u}_0$. On note la pulsation $\omega^2 = k/m$, l'amortissement critique $c_c = 2m\omega = 2\sqrt{km} = 2k/\omega$ et l'amortissement relatif $\xi = c/c_c$. En recherchant des solutions sous la forme $u = C\,\mathrm{e}^{st}$, l'équation caractéristique du système est :

$$s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0$$

a) Régime libre conservatif

Un régime conservatif, caractérisé par un amortissement $c = 0$ ne dissipe pas d'énergie par amortissement. La solution en déplacement de l'équation différentielle est :

$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega(t) + u_0 \cos \omega(t)$$

Nous pouvons composer ces deux fonctions en les projetant sur l'axe des réels afin d'obtenir un vecteur résultat de longueur $\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2}$ et d'angle de phase $\theta = \tan^{-1}(\dot{u}_0/u_0\omega)$, ainsi :

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta)$$

b) Régime libre dissipatif

Pour $c \neq 0$, la solution de l'équation caractéritisque est :

$$s = \xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

En fonction de la valeur donnée à l'amortissement (ξ =, > ou < à 1) , trois types de comportement peuvent être distingués :

• *Amortissement critique,* $\xi = 1$

La solution, apériodique, est :

$$u(t) = (u_0(1 + \omega t) + \dot{u}_0 t) \exp^{-\omega t}$$

• *Amortissement surcritique,* $\xi > 1$

en notant $\tilde{\omega} = \omega\sqrt{\left(\xi^2 - 1\right)}$, la solution apériodique, est :

$$u(t) = \left(u_0 \cosh(\tilde{\omega}t) + \frac{\xi\omega u_0 + \dot{u}_0}{\tilde{\omega}} \sinh(\tilde{\omega}t)\right) \mathrm{e}^{-\xi\omega t}$$

• *Amortissement souscritique,* $\xi < 1$

C'est le cas le plus courant rencontré en dynamique des structures. La pseudo-pulsation de l'oscilateur amorti ω_D est égale à $\omega_D = \omega\sqrt{\left(1-\xi^2\right)}$. L'amortissement a donc tendance à diminuer les pulsations propres d'un système. Le déplacement s'exprime comme suit :

$$u(t) = \left(u_0 \cos(\omega_D t) + \frac{\xi\omega u_0 + \dot{u}_0}{\omega_D}\sin(\omega_D t)\right)\mathrm{e}^{-\xi\omega t}$$

Ces deux fonctions trigonométriques périodiques peuvent se combiner pour exprimer le déplacement sous la forme simple suivante :

$$u(t) = \rho\cos(\omega_D t - \theta)\,\mathrm{e}^{-\xi\omega t}$$

Avec $\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\dfrac{\xi\omega u_0 + \dot{u}_0}{\omega_D}\right)^2}$ et $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\xi\omega u_0 + \dot{u}_0}{\omega_D u_0}\right)$

10.1.3 Le régime forcé sinusoïdal

Dans ce cas de figure, nous allons étudier la réponse du système à un degré de liberté soumis à une excitation harmonique du type sinusoïdal. En effet, nous verrons par la suite que les systèmes les plus complexes, soumis à des charges les plus variées peuvent se ramener à ce cas précis. le second membre de l'équations différentielle du mouvement s'exprime maintenant par $p(t) = p_0\sin(\bar{\omega}t)$. Nous noterons β, le rapport de la pulsation excitatrice à la pulsation propre du système : $\beta = \bar{\omega}/\omega$.

a) Régime forcé conservatif

La solution complète s'écrit :

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\left[\frac{1}{1-\beta^2}\right]\left(\sin(\bar{\omega}t) - \beta\sin(\omega t)\right)$$

On définit le facteur de réponse dynamique comme le rapport entre la réponse dynamique et le déplacement statique ($u_{stat} = p_0/k$). Ici :

$$R(t) = \frac{u(t)}{u_{stat}} = \frac{1}{1-\beta^2}\big(\sin(\bar{\omega}t) - \beta\sin(\omega t)\big)$$

À la résonance, $\beta = 1$ et $R(t) \to \infty$.

b) Le régime forcé dissipatif

La résolution de l'équation du mouvement nous fournit un déplacement ayant pour forme la somme d'un terme en régime transitoire et d'un terme en régime permanent forcé. Si on ne s'intéresse qu'à la réponse en régime permanent après disparition des termes transitoires par amortissement, le déplacement du système s'écrit :

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\left[\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}\right]\big((1-\beta^2)\sin(\bar{\omega}t) - 2\xi\beta\cos(\bar{\omega}t)\big)$$

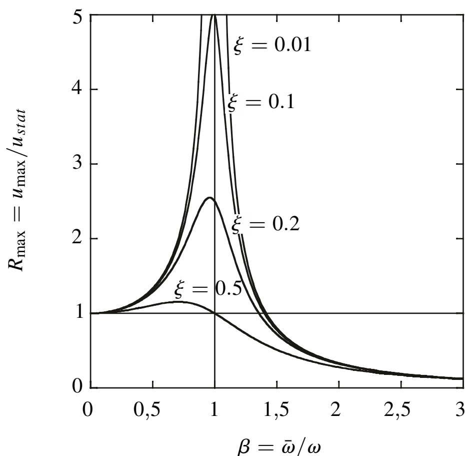


Figure 10.2

Le facteur de réponse dynamique maximal, noté $R_{\max}$ vaut dans ce cas :

$$R_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}}$$

10.1.4 Régime permanent sous une charge périodique quelconque

a) Réponse en fréquence

Une méthode de calcul plus efficace consiste à remplacer les efforts et déplacements par des nombres complexes. En régime forcé harmonique, on peut exprimer l'effort extérieur $p(t)$ en fonction d'une force complexe $\hat{p}(t)$:

$$\hat{p}(t) = p_0 e^{i\bar{\omega}t} = p_0(\cos\bar{\omega}t + i\sin\bar{\omega}t)$$

Dans ce cas, la partie réelle ou la partie imaginaire du chargement pourra être utilisée. Le déplacement $u(t)$ est alors la partie réelle ou imaginaire du déplacement complexe $\hat{u}(t)$, ainsi,

$$\hat{u}(t) = \hat{G}e^{i\bar{\omega}t}$$

En appelant $\hat{Z}$ l'impédance complexe et $\hat{H}$ l'admittance complexe, nous définissons la réponse complexe en fréquence comme :

$$\hat{H}(\bar{\omega}) = \frac{1}{\hat{Z}(\bar{\omega})} = \frac{1}{k}\frac{1}{\left(1 - \beta^2\right) + 2i\xi\beta}$$

Le déplacement (complexe) peut donc s'écrire :

$$\hat{u}(t) = \hat{H}(\bar{\omega})p_0 e^{i\bar{\omega}t} = |\hat{H}(\bar{\omega})|e^{i(\bar{\omega}t - \theta)}$$

avec :

$$|\hat{H}(\bar{\omega})| = \frac{1/k}{\sqrt{\left(1 - \beta^2\right)^2 + \left(2i\xi\beta\right)^2}}$$

et

$$\tan\theta = \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$

b) Représentation d'une charge périodique en série complexe de Fourier

On peut représenter une charge périodique, de période T_P par décomposition en série de Fourier de la forme :

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t$$

La charge est ainsi décomposée en une somme d'une charge constante représentant la moyenne et d'une série de charges harmoniques de fréquence $\bar{\omega}_{n,}$ d'amplitude a_n et b_n, représentant la variation par rapport à la valeur moyenne. Par les équations d'Euler, nous pouvons relier ces fonctions trigonométriques aux fonctions exponentielles complexes. La série de Fourier pour la charge $p(t)$ devient :

$$p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{P}_n e^{i\bar{\omega}_n t}$$

Avec :

$$\hat{P}_n = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} p(t) e^{-i\bar{\omega}_n t} dt$$

c) Réponse à un chargement décomposé en série complexe de Fourier

Du principe de superposition, la réponse totale permanente d'un oscillateur élémentaire à une excitation périodique peut s'écrire :

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(\bar{\omega}_n) \hat{P}_n(\bar{\omega}_n) e^{i\bar{\omega}_n t}$$

10.1.5 Réponse à une charge arbitraire

Dans ce parapraphe, nous décrivons deux manières différentes (temporelle et fréquentielle) permettant d'obtenir la réponse d'un système à un ddl soumis à une action dynamique quelconque.

a) Réponse simplifiée à une impulsion

Considérons une charge impulsionnelle $p(t)$. Si la durée du chargement (t_1) est très courte par rapport à la période de vibration du système T ($t_1 \ll T$), on peut faire l'hypothèse qu'il n'y a pas de changement notable du déplacement durant le temps d'application du chargement mais par contre qu'un changement de vitesse peut être considéré. Soit la relation entre impulsion et quantité de mouvement :

$$I = m\Delta\dot{u} \sim \int_0^{t_1} p(t)dt$$

Si l'impulsion (unitaire de Dirac) a lieu à $t = \tau$, le déplacement du système au temps $\bar{t} = t - \tau$ se met sous la forme :

$$u(\bar{t}) = \frac{1}{m\omega} \sin \omega\bar{t} = h(\bar{t})$$

où $h(t)$ est la réponse à une impulsion unitaire.

Pour un système amorti :

$$h(\bar{t}) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega\bar{t}} \sin \omega_D\bar{t}$$

b) Réponse temporelle à un chargement arbitraire

Le chargement est ici considéré comme une suite d'impulsions unitaires. La réponse totale est obtenue par la somme des réponses différentielles :

$$u(t) = \int_0^t p(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

soit :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t - \tau)d\tau$$

Cette dernière équation est appelée intégrale de Duhamel.

c) Réponse en fréquence à un chargement arbitraire

Il s'agit d'une extension aux fonctions non périodiques de la décomposition en séries de Fourier. Une charge quelconque (ou fonction quelconque, $p(t)$) peut être décrite par une intégrale représentant les contributions des composantes harmoniques ayant un spectre de fréquence continu de $-\infty$ à $+\infty$. Les intégrales :

$$\hat{P}(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)e^{-i\bar{\omega}t}dt \quad \text{et} \quad p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{P}(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t}d\bar{\omega}$$

constituent une paire de transformée de Fourier. $\hat{P}(\bar{\omega})$ est appelée transformée de Fourier de $p(t)$ et $p(t)$ est appelée transformée inverse de Fourier de $\hat{P}(\bar{\omega})$.

Par analogie à la réponse d'un système soumis à une charge périodique décomposée en séries complexes de Fourier, la réponse d'un système à un ddl est obtenue en calculant la somme des composantes de la réponse sur l'étendue des fréquences, on obtient ainsi :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\omega}=-\infty}^{+\infty} \hat{U}(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t}d\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\omega}=-\infty}^{+\infty} \hat{H}(\bar{\omega})\hat{P}(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t}d\bar{\omega}$$

avec :

$$\hat{U}(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-i\bar{\omega}t}dt = \hat{H}(\bar{\omega})\hat{P}(\bar{\omega})$$

Remarque : La réponse impulsionnelle $h(t)$ est la transformée inverse de Fourier de la réponse en fréquence $\hat{H}(\bar{\omega})$.

10.1.6 Réponse à des chargements impulsionnels simples

La tableau ci-après fournit le coefficient d'amplification dynamique maximal obtenu pour un système à un degré de liberté soumis à des charges impulsionnels sinusoïdale et rectangulaire. Pour des impulsions de courtes durées, nous considérons ci-après que le temps d'application de l'effort t_1 est petit devant la période propre de l'oscillateur T. Ainsi, le déplacement maximum est atteint pendant la vibration libre, à la fin du chargement $\left(\beta = \overline{\omega}/\omega = T/\overline{T} > 1\right)$.

Description	schémas	R_{max}
impulsion sinusoïdale	$P(t)$, P_0, t_1, t	$\frac{2\beta}{1-\beta^2}\cos\frac{\pi}{2\beta}$
impulsion rectangulaire	$P(t)$, P_0, t_1, t	$2\sin\pi\frac{t_1}{T}$

10.2 SYSTÈME À *N* DEGRÉS DE LIBERTÉ

10.2.1 Équations du mouvement

Après discrétisation du problème mécanique, de manière analogue par exemple à la méthode des éléments finis en statique, nous pouvons construire les matrices de masse **M**, d'amortissement visqueux **C**, de raideur **K** et le vecteur des efforts exterieurs F. L'équation du mouvement sous forme matricielle peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{U} + \mathbf{C}\dot{U} + \mathbf{K}U = F$$

U est le vecteur des déplacements des degrés de liberté considérés.

10.2.2 Signification des modes propres et fréquences propres

Nous supposerons dans cette partie un système discret, conservatif ($\mathbf{C} = 0$) et sans chargement extérieur. L'équation discrète du mouvement prendra la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{U} + \mathbf{K}U = 0$$

Prenons l'exemple d'un bâtiment de trois étages. Concentrons la masse au niveau des planchers, nous obtenons ainsi un système à trois ddl dynamiques. Soumis à un chargement quelconque, le mouvement horizontal de chaque plancher n'est plus harmonique. Par contre, si la vibration libre de la structure est initiée par des vitesses et des déplacements appropriés imposés aux masses, la structure oscillera suivant un mouvement harmonique simple. trois allures caractéristiques de la déformée existent pour un système à trois ddl. Ce sont les modes propres de vibration.

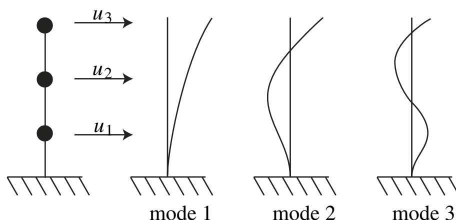


Figure 10.3

À chaque mode nous pouvons associer une fréquence propre de vibration :

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Avec : $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 ..... < \omega_N$

Le vecteur ϕ_n définit l'allure de la déformée de la structure répondant à la pulsation propre ω_n. ϕ_n définit seulement le rapport des déplacements des planchers entre eux $(u_1/u_2, u_1/u_3)$.

10.2.3 Détermination des fréquences propres de vibration

La réponse d'un mode propre est harmonique, ainsi le vecteur des déplacements peut s'écrire :

$$U(t) = \hat{U} \sin(\omega(t) + \theta)$$

$\hat{U}$ représente les modes de déformations possibles qui ne changent pas avec le temps (seule l'amplitude varie). L'analyse du système nous montre qu'une solution n'est possible que si :

$$det\left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{I}\right) = 0$$

C'est l'équation aux fréquences du système. En développant le déterminant, nous obtenons une équation polynomiale de degré N en ω^2. Les N racines sont les fréquences propres des N modes de vibration du système $\left(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \ldots \omega_N^2\right)$.

10.2.4 Détermination des modes propres de vibration

Pour compléter le problème aux valeurs propres, on peut calculer les N formes de vibrations correspondant aux N modes de vibration. Si nous remplaçons les valeurs de ω_n :

$$\left[\mathbf{K} - \omega_n^2\mathbf{M}\right](\hat{U}_n) = 0$$

L'ensemble des vecteurs modaux de vibration propre peuvent ête mise sous forme matricielle :

$$[\phi] = [\phi_1\ \phi_2\ \phi_3 \ldots\ldots\ldots \phi_N]$$

10.2.5 Propriété d'orthogonalité des modes

Si $\omega_n \neq \omega_m$ alors,

$$\phi_m^T\mathbf{K}\phi_n = 0$$

et

$$\phi_m^T\mathbf{M}\phi_n = 0$$

Les vecteurs modes de vibration sont dits orthogonaux par rapport aux matrices **M** et **K**. Ainsi la matrice $[\phi^T]\mathbf{M}[\phi] = [\hat{M}]$ est diagonale et

$$\phi_n^T\mathbf{M}\phi_n = \hat{M}_n$$

est appelée masse généralisée du mode n. De façon analogue pour la matrice de raideur, nous pouvons définir la matrice de raideur généralisée $[\hat{K}]$ par :

$$\phi_n^T \mathbf{K} \phi_n = \hat{K}_n$$

10.2.6 Normalisation des vecteurs modes de vibration

Il est avantageux de normaliser U_n de façon à obtenir :

$$\phi_n^T \mathbf{M} \phi_n = 1$$

Ainsi, si $\phi_n = \dfrac{1}{\hat{M}_n^{1/2}} U_n$ alors $[\phi^T]\mathbf{M}[\phi] = \mathbf{I}$.

10.2.7 Équations modales du mouvement - Superposition des modes

a) Coordonnées normales

Les modes constituent un ensemble de coordonnées qui ne sont pas couplées dynamiquement. Pour un système à N ddl, ils constituent N allures indépendantes. Leur amplitude sert de coordoonnées généralisées. Tout vecteur $U(t)$ peut être trouvé par superposition des amplitudes des modes de vibration.

$$U(t) = \phi_1 Y_1(t) + \phi_2 Y_2(t) + \phi_3 Y_3(t) + ... + \phi_N Y_N(t)$$

$$U(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n Y_n(t) = [\phi] Y(t)$$

Ainsi les coordonnées normales appréciant l'amplitude de chacun des modes peuvent être déterminées :

$$Y_n(t) = \frac{\phi_n^T \mathbf{M} U(t)}{\phi_n^T \mathbf{M} \phi_n}$$

b) Équations découplées du mouvement non amorti

Soit un système à N ddl :

$$\mathbf{M}\ddot{U} + \mathbf{K}U = F(t)$$

Dans le domaine linéaire, $[\phi]$ reste constant au cours du temps. Par projection dans l'espace des modes propres, l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\phi_n^T \mathbf{M}\phi_n \ddot{Y}_n + \phi_n^T \mathbf{K}\phi_n Y_n = \phi_n^T F(t)$$

Appelons $\bar{M}_n = \phi_n^T \mathbf{M}\phi_n$ la masse généralisée, $\bar{K}_n = \phi_n^T \mathbf{K}\phi_n$ la raideur généralisée et $\bar{F}_n = \phi_n^T F(t)$ la force généralisée. L'équation du mouvement se retrouve sous sa forme scalaire en $Y_n(t)$ pour le mode n :

$$\bar{M}_n \ddot{Y}_n + \bar{K}_n Y_n = \bar{F}_n$$

Soit encore :

$$\ddot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{\bar{F}_n}{\bar{M}_n}$$

On résoud les Y_n pour $n = 1, 2, ..., N$. Connaissant $Y(t)$, on calcule la réponse dans le système de coordonnées géométriques :

$$U(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n Y_n(t) = [\phi]Y(t)$$

c) Équations découplées du mouvement amorti

Si les ϕ_n ne sont pas orthogonaux par rapport à la matrice d'amortissement **C** alors on ne peut pas découpler les équations du mouvement. Dans le cas contraire, l'équation discrète du mouvement peut se mettre sous la forme suivante pour le mode n :

$$\bar{M}_n \ddot{Y}_n + \bar{C}_n \dot{Y}_n + \bar{K}_n Y_n = \bar{F}_n$$

avec :

$$\phi_n^T \mathbf{C} \phi_n = \bar{C}_n$$

et :

$$\phi_m^T \mathbf{C} \phi_n = 0$$

Si de plus nous introduisons l'amortissement relatif $\bar{C}_n = 2\xi_n \omega_n \bar{M}_n$ alors nous obtenons n équations découplées en Y_n :

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{\bar{F}_n}{\bar{M}_n}$$

Il est toutefois plus facile et plus physique de définir l'amortissement relatif ξ_n par mode que le coefficient $\bar{C}_n$.

d) Condition d'orthogonalité par rapport à C

Lord Rayleigh a montré qu'une matrice **C** proportionnelle à la matrice de masse et/ou de raideur satisfait les conditions d'orthogonalité :

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$$

Connaissant la valeur de l'amortissement à imposer à deux modes m et n, nous pouvons calculer les deux paramètres α et β par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2 \frac{\omega_m \omega_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \begin{bmatrix} \omega_n & -\omega_m \\ -\dfrac{1}{\omega_n} & \dfrac{1}{\omega_m} \end{bmatrix}$$

Il existe un nombre infini de ce type de matrice, définie par la série de Caughey :

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_{b=-\infty}^{\infty} a_b (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^b$$

10.3 VIBRATION DES SYSTÈMES CONTINUS

10.3.1 Vibration axiale des barres

Considérons une barre d'axe x, de longueur L, de section $A(x)$, de densité linéique ρ, composée d'un matériau élastique linéaire de module young E soumise à une densité linéique d'effort $q(x,t)$.



Figure 10.4

Quelle que soit l'abscisse x, l'équation générale de vibration axiale de la barre est

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E.A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \rho A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(x,t) = 0$$

Les conditions limites, en effort ou en déplacement sont données ci-après : en $x = 0$, $E.A(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) + q(0,t) = 0$ ou $u(0,t) = 0$ et en $x = L$, $E.A(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) + q(L,t) = 0$ ou $u(L,t) = 0$.

Pour une barre de section constante A, en vibration libre (sans effort extérieure $q(x,t) = 0$) l'équation dynamique se ramène à l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

avec $c = \sqrt{E/\rho}$, la célérité des ondes uniaxiales de traction-compression dans le milieu élastique.

10.3.2 Vibration transversale des poutres

Soit une poutre isostatique d'axe x, de longueur L, de moment quadratique constant I, de densité linéique ρ, composée d'un matériau élastique linéaire de module young E. Les pulsations propres de flexion lorsque la poutre repose sur deux appuis simples sont :

$$\omega_n = \frac{\pi^2 n^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

Les n modes propres associés sont :

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

10.3.3 Détermination du mode fondamental de vibration : méthode de Rayleigh

Le but de la méthode de Rayleigh, par application du principe de conservation de l'énergie, consiste à déterminer le mode fondamental de vibration d'une structure. Il faut être capable d'estimer la forme du mode propre recherché. Pour cela, en considérant qu'un mode de vibration correspond à un état de déformation de la structure pour lequel les efforts de rappel élastiques équilibrent les efforts d'inertie, la déformée du mode propre est calculée par une analyse statique, en considérant un chargement inertiel appliqué à l'ensemble des masses de la structure. Considérons la structure simple ci-dessous, de masse linéique variable $m(x)$, dont on cherche à estimer la première pulsation propre de vibration horitonzale. Le chargement équivalent permettant de calculer la déformée modale est obtenu en appliquant une accélération uniforme à l'ensemble de la structure. La déformée obtenue est notée $\psi(x)$.

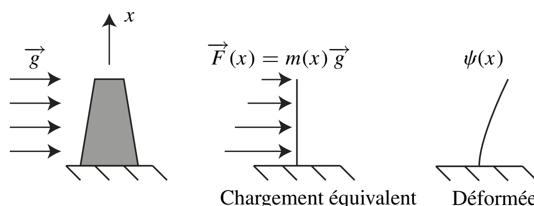


Figure 10.5

En égalant les énergies cinétiques et potentielles maximum calculées sur la base d'un mouvement harmonique, la pulsation fondamentale de la structure se ramène à :

$$\omega^2 = \frac{\displaystyle\int_0^l EI(x)\left[\psi''(x)\right]^2 dx}{\displaystyle\int_0^l m(x)\psi^2(x)dx}$$

Pour un système discret, le quotient de Rayleigh va s'exprimer comme suit permettant de déterminer le mode n de vibration :

$$\omega_n^2 = \frac{\phi_n^T \mathbf{K} \phi_n}{\phi_n^T \mathbf{M} \phi_n}$$

10.3.4 Modes propres de vibration des poutres

Le premier mode propre de vibration est donné dans le tableau ci-après pour des poutres de longueur l, de module d'Young E, de masse linéique m et de moment quadratique I, supportant différents types de conditions limites. La solution générale est de la forme :

$$\omega = \alpha\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

Type de liaisons	schémas	α
Appui simple - Rotule		9.87
Appui simple - Encastrement		15.4
Encastrement - Encastrement		22.4
Encastrement - Libre		3.51

10.3.5 Modes propres de vibration des plaques

Le premier mode propre de vibration est donné dans le tableau ci-après pour des plaques d'épaisseur constante h, de masse volumique ρ, de grand côté a et de petit côté b, supportant différents types de conditions limites. La solution générale est de la forme :

$$\omega = \beta\sqrt{\frac{Eh^2}{ma^4}}$$

Type de liaisons	schémas	$b/a = 1$	$b/a = 1.5$	$b/a = 2$	$b/a = 2.5$	$b/a = 3$	∞
Appui simple		5.7	4.17	3.56	3.3	3.17	2.85
Appui simple - Encastrement		6.83	5.46	5.0	4.8	4.69	4.45
Encastrement - Encastrement		8.36	7.23	6.88	6.71	6.64	6.46
Encastrement - Encastrement		10.38	7.79	7.09	6.86	6.69	6.46

Remarque : Pour une plaque circulaire, de diamètre a, simplement appuyé sur son pourtour, $\beta = 11.84$ et encastrée sur son bord $\beta = 5.9$.

Index

P

R

S

T

V

SCIENCES SUP

Série Aide-mémoire



Arnaud Delaplace
Fabrice Gatuingt
Frédéric Ragueneau

MÉCANIQUE DES STRUCTURES

Cet aide-mémoire s'adresse aux étudiants en Licence et Master professionnels (génie des matériaux, génie civil...) ou en IUT de génie mécanique.

Il offre une approche moderne de la mécanique des structures en présentant les méthodes les plus récentes pour la résolution des systèmes mécaniques simples ou complexes, dont les dimensions vont du micromètre à quelques dizaines de mètres.

Au cours des chapitres de nombreux tableaux synthétisent et récapitulent les caractéristiques des principaux cas en résistance des matériaux.

ARNAUD DELAPLACE
est chargé de recherche au CNRS, agrégé de Génie Civil.

FABRICE GATUINGT
est maître de conférences à l'ENS Cachan, agrégé de Génie Civil.

FRÉDÉRIC RAGUENEAU
est maître de conférences à l'ENS Cachan.

Tous trois sont chercheurs au Laboratoire de Mécanique et Technologie – LMT Cachan.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE



DUNOD

ISBN 978-2-10-053958-1

www.dunod.com